

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Astrofísica y Ciencias de la Atmósfera



TESIS DOCTORAL

**Extracción orbital *in situ* de simulaciones vivas de alta precisión de
sistemas no colisionales formados por colapso frío**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

José Héctor Noriega Mendoza

Director

Luis Aguilar Chiu

Madrid, 2018

Extracción orbital *in situ* de simulaciones vivas de alta precisión de sistemas no colisionales formados por colapso frío



Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Astrofísica y Ciencias de la Atmósfera

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias presentada por

José Héctor Noriega Mendoza

Director de tesis

Dr. Luis Aguilar Chiu (IAUNAM, México)

Abril de 2017

A mi familia, constantes y pacientes testigos del desarrollo de este trabajo
en la Inspiron 17 de la mesa del comedor

Comentarios iniciales y agradecimientos

Este trabajo de investigación ha sido posible literalmente por la conjunción de tres elementos: 1) el llamarme Héctor, 2) la confianza y paciencia de un asesor para guiar este proyecto a mil kilómetros de distancia —en línea recta— por varios años, 3) una institución académica con un programa de posgrado en astronomía que permite dicho trabajo de tesis a distancia.

Mi proyecto nació como resultado de una comunicación por email con el Dr. Luis Aguilar de la UNAM (México), a quien me acerqué solicitando un proyecto de Tesis doctoral en el área de la dinámica estelar, por varios años ya el campo de investigación con el que astronómicamente yo había encontrado una particular identificación personal. Habiendo concluido una segunda maestría en astronomía, siendo ya profesor de tiempo completo en la Universidad de Texas en El Paso (UTEP), EUA y habiéndome convertido en padre por segunda ocasión, encontré el momento preciso para buscar un buen asesor fuera de UTEP —donde no existe aun un programa de posgrado en astronomía— que estuviera dispuesto a sugerirme y guiarme a través de un tema de investigación interesante. Al poco tiempo de mi solicitud, el Dr. Aguilar me envió un detallado proyecto doctoral que inmediatamente me cautivó. Pronto supe por el propio Luis que un peculiar requisito impuesto por él para aceptar asesorar un nuevo estudiante doctoral es que tal estudiante tenga un nombre de origen griego o romano como Julio, Cicerón, Agamenón, Aquiles... o Héctor. Doy entonces gracias en primer lugar a mis padres por haberme dado este nombre, pues de no ser así esta Tesis nunca se hubiera materializado al menos a través de un académico de la categoría del Dr. Aguilar.

Mi plan era, ya con un proyecto de Tesis concreto bajo el brazo y un valiente asesor que me orientaría a distancia, regresar a la universidad donde realicé mi segundo máster —en los EUA— y desarrollar mi trabajo doctoral ahí. El plan resultó ser poco factible aun en otros institutos astronómicos del continente y fue así que busqué una institución de ultramar con un programa de posgrado suficientemente versátil como para permitirme lograr mi objetivo dadas mis particulares circunstancias: una tesis desarrollada en una institución a distancia con un asesor también a distancia. Para mi fortuna, el posgrado en astronomía de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) reunía esas características a través del Departamento de Astrofísica y Ciencias de la Atmósfera. Agradezco así las políticas académicas de la UCM y su Departamento de Astrofísica para, una vez cumplidos los respectivos requisitos de admisión

a su programa de doctorado, acoger este proyecto de tesis desarrollado intercontinentalmente desde El Paso, Texas (EUA), respaldado y conducido por el Dr. Aguilar desde Ensenada, México.

Durante el proceso inicial de orientación y posteriormente de matrícula en la UCM, agradezco especialmente a la Dra. Elisa de Castro y al Dr. Jesús Gallego la enorme ayuda proporcionada (desde luego, a distancia por email o teléfono) en relación con requisitos, fechas límite e información general y particular sobre aspectos académicos y administrativos. La Dra. de Castro tuvo la gentileza de facilitar algunos trámites realizados un tanto tardíamente de mi parte desde El Paso y el Dr. Gallego aceptó amablemente ser mi representante académico local en la UCM. A ambos va mi sincera gratitud, así como al Dr. David Montes, quien pronta y personalmente, también a la distancia, aclaró y ayudó a agilizar los varios pasos del proceso académico-administrativo en Madrid durante la última e intensa etapa rumbo a la defensa de este proyecto.

Siempre he creído que un trabajo de investigación, independientemente de la belleza de las ideas y conceptos que lo sustentan, enfrenta en el día a día de su realización el desafío constante de los detalles técnicos bien resueltos, sin los cuales el objetivo es imposible de lograr. Esta tesis estuvo basada prácticamente desde su concepción en el ambiente NEMO, el conjunto de programas y herramientas de simulación y análisis de galaxias creado por Peter Teuben. La mayor parte de mi trabajo de tesis ha consistido en largas corridas con códigos de N -cuerpos en NEMO, de tal manera que fue una herramienta nueva que tuve que aprender a usar de inicio. Aquí doy un contundente y repetido gracias al buen Peter Teuben (en la Universidad de Maryland), a quien no recuerdo haberme dejado de responder una sola pregunta o aclaración técnica sobre el uso e interpretación de resultados con NEMO. Peter tiene la sorprendente y maravillosa característica no sólo de responder toda pregunta técnica sobre NEMO que se le plantee por email, sino además de hacerlo de una manera casi inmediata (en minutos, si está frente a su computadora, que es la norma). Peter incluso tuvo en cierto momento la iniciativa de modificar uno de sus códigos en NEMO expresamente para facilitar un experimento (fallido) en mi proyecto para extraer un potencial “congelado” de una de mis simulaciones de N -cuerpos.

Hasta el Río de la Plata va también mi agradecimiento sincero a Daniel Carpintero, cuya intervención hizo posible un mejor entendimiento del código TAXON de clasificación orbital. Poder determinar los tipos particulares de órbitas resultantes de mis simulaciones era un objetivo central de mi trabajo, por lo que un código robusto y eficiente como el de Daniel se

hacía indispensable una vez que las simulaciones en NEMO fueron completadas. Con Daniel nos fue posible concretar una versión semiautomatizada de TAXON de tal manera que el código pudiera extraer cientos de miles de órbitas de los correspondientes —y “gigamente” enormes— archivos de salida de NEMO en un lapso del orden de varios días. Igualmente, aprecio en todo lo que vale la minuciosa revisión de la versión final de esta Tesis hecha por Daniel.

Finalmente, un agradecimiento a la Dra. Tunna Baruah del Departamento de Física de UTEP por su gran ayuda en la escritura del código EXTRILLA, así como al *High Performance Systems Lab* (HiPerSys) a través tanto del original *CyberSHARE Center of Excellence* con el Dr. Rodrigo Romero, como de la actual *Research Cloud* y su exdirectora la Dra. Patricia Teller. Durante los últimos años, esta ha sido la plataforma computacional en UTEP donde, por medio de sus rápidos procesadores, las simulaciones de N -cuerpos que forman la columna vertebral de esta contribución fueron posibles.

Varios elementos básicos deben conjuntarse positivamente, como dije al principio, para la consumación de una Tesis doctoral, especialmente si se realiza a la distancia. En realidad y en mi caso particular, es claro que fueron más de los tres que menciono inicialmente aquí. Elementos que uno mismo debe orquestar con su asesor y hacer posibles en medio de los vaivenes de la emoción y la frustración, con el objetivo último de realizar un trabajo mínimamente original y de frontera en el área astronómica, en este caso gracias al Dr. Luis Aguilar.

De esta manera, presento aquí los resultados de un proyecto desarrollado a lo largo de varios años, con la satisfacción de un objetivo cumplido y el honor particular de discutirlo y defenderlo en la Madre Patria de un mexicano, España, la tierra del gran Ramón y Cajal que nuestro querido compositor Agustín Lara evocó e idolatró (sin conocerla) a través de maravillosas canciones.

Héctor Noriega Mendoza

El Paso, Texas (EUA)

21 de abril de 2017

Resumen

El intervalo de configuraciones autoconsistentes de sistemas autogravitantes, no colisionales, es determinado por la estructura orbital que sustentan, dado que las órbitas son sus bloques constitutivos básicos en el espacio fase (Teorema de Jeans, ver Binney y Tremaine 2008, Sección 4.2). No son las posiciones y velocidades individuales de las partículas las que cuentan, pues aquellas cambiarán de un instante a otro, sino más bien las órbitas a lo largo de las cuales tales partículas se mueven. La distribución global de masa, a través de su campo de fuerza, determina las órbitas que son posibles. A su vez, las fracciones de ocupación de familias orbitales determinan el intervalo de posibles modelos autoconsistentes que pueden existir con esta distribución de masa, algo que es directamente explotado por algunos métodos para construir modelos autoconsistentes, como el método de Schwarzschild (1979). Como tal, determinar la estructura orbital de modelos autoconsistentes es de fundamental importancia. Tradicionalmente, la estructura orbital de modelos no ha sido estudiada extensamente, sino tan sólo sus propiedades dinámicas globales (p.ej., energía y momento angular totales) y locales (p.ej., los momentos de la distribución de velocidades locales, Vorobyov y Theis 2008). Sin embargo, una nueva generación de métodos para construir modelos autoconsistentes hace uso directamente de la composición orbital, p.ej. el método “Hecho a la Medida” de Syer y Tremaine (1996). En particular, las simulaciones de N -cuerpos permiten la construcción de modelos autoconsistentes, pero la colisionalidad debida a su granularidad ha hecho imposible una extracción orbital exitosa de ellos. En un sistema colisional las partículas no siguen órbitas, sino trayectorias, que son concatenaciones de segmentos de órbitas, dado que las colisiones dispersan a las partículas en el espacio orbital. Fue sólo cuando las simulaciones de N -cuerpos pudieron seguir del orden de 10^6 partículas, que la granularidad fue reducida al punto donde las primeras órbitas pudieron extraerse directamente de una simulación de N -cuerpos (Ceverino y Klypin 2007).

Realizamos una serie de simulaciones de N -cuerpos de alta precisión del colapso frío de sistemas no colisionales inicialmente esféricos por medio del código GYRFALCON de Dehnen (2000) y del ambiente NEMO (Teuben 1995). Nuestros colapsos generan configuraciones esferoidales finales muy prolatas. Después de esta fase de colapso, simulamos la evolución de nuestros sistemas durante períodos temporales iguales a 85 y 170 tiempos dinámicos correspondientes al radio medio de masa. La conservación de la energía total es mejor que 0.005% y los eigenvalores del tensor de inercia varían por menos del 5% durante el período estacionario completo postcolapso. Usamos este período para extraer órbitas de partículas individuales *directamente* de las simulaciones. Los errores de conservación de energía en las partículas cuyas órbitas son extraídas se ubican en el intervalo (0.001,0.01)%. Posteriormente, usamos el código TAXON de Carpintero y Aguilar (1998) para clasificar tales órbitas. Encontramos que podemos clasificar exitosamente 1 a 1.5% de las órbitas extraídas de nuestras configuraciones relajadas finales, donde menos del 15% son órbitas caóticas, mientras 30% son órbitas de caja y 60% son tubos (alrededor de los ejes mayor y menor del esferoide). Nuestro objetivo es demostrar que la extracción orbital directa de las simulaciones numéricas es posible, y que no hay necesidad de “congelar” la configuración final del sistema de N -cuerpos para extraer un potencial gravitacional independiente del tiempo, para usarlo luego en simulaciones de partículas de prueba para extraer órbitas. En un próximo trabajo buscaremos comparar la estructura orbital de estos sistemas, que han sido moldeados por el relajamiento violento, con el intervalo de sistemas autoconsistentes que puedan ser contruidos usando el método de Schwarzschild (1979).

Abstract

The range of self-consistent configurations of collisionless, self-gravitating systems, is determined by the orbital structure they support, as orbits are their basic building blocks in phase space (e.g. Jeans' Theorem, see Binney & Tremaine 2008, section 4.2). It is not the individual positions and velocities of the particles that matter, as these will change from one instant to another, but rather the orbits along which they move. The overall mass distribution, through its force field, determines the orbits that are possible. In turn, the occupation fractions for each orbit determine the range of possible self-consistent models that can exist with this mass distribution, something directly exploited by some methods to build self-consistent models, like Schwarzschild's (1979) method. As such, determining the orbital structure of self-consistent models is of paramount importance. Traditionally, the orbital structure of models has not been extensively studied, but rather the global (e.g. overall energy and angular momentum), and local (e.g. moments of the local velocity distribution) dynamical properties (e.g. Vorobyov & Theis 2008). However, a new generation of methods to build self-consistent models uses directly the orbital makeup, e.g. the "Made to Measure" method of Syer and Tremaine (1996). In particular, N -body simulations allow the construction of self-consistent models, but the collisionality due to their graininess had made impossible the successful extraction of orbits from them. In a collisional system, particles do not follow orbits, but trajectories that are piecewise orbits, as collisions scatter particles in orbital space. It was only when N -body simulations were able to follow of the order of 10^6 particles, that the graininess was able to be pushed down where the first orbits could be extracted directly from an N -body simulation (Ceverino & Klypin 2007).

We performed high precision, N -body simulations of the cold collapse of initially spherical, collisionless systems, using the GYRFALCON code of Dehnen (2000) and the NEMO toolbox (Teuben 1995). The collapses produced very prolate spheroidal configurations. After the collapse, the systems were evolved during 85 and 170 half-mass radius dynamical timescales. Energy conservation was better than 0.005% and the eigenvalues of the inertia tensor vary by less than 5% during the entire quiescent period after the cold collapse. We used this period to extract individual particle orbits directly from the simulations. Individual particle energy conservation for the extracted orbits is in the range 0.001—0.01%. We then used the TAXON code of Carpintero and Aguilar (1998) to classify the extracted orbits. We found that we can successfully classify 1 to 1.5% of the extracted orbits from our final, relaxed configurations, where less than 15% are chaotic orbits, while 30% are box orbits and 60% are tube orbits (long and short axis). Our goal has been to prove that direct orbit extraction is feasible, and that there is no need to "freeze" the final N -body system configuration to extract a time-independent potential, to use in test-particle simulations to extract orbits. In future work we intend to compare the orbital make up of these systems, which have been shaped by violent relaxation, with the range of self-consistent systems that can be built using Schwarzschild's (1979) method.

Índice

Comentarios iniciales y agradecimientos.....	i
Resumen	ii
Abstract	iii
Capítulo 1 Galaxias elípticas y dinámica estelar	13
1.1 Introducción	13
1.2 Isofotas y elipticidad	15
1.3 Cinemática.....	16
1.4 Perfil de brillo superficial.....	18
1.5 Dinámica estelar	20
1.5.1 Ecuación de Poisson y ecuación de Boltzmann.....	21
1.5.2 Equilibrio virial y procesos de relajamiento.....	25
1.5.2.1 Relajamiento colisional.....	27
1.5.2.2 Mezclado de fase y relajamiento violento.....	30
1.5.3 Integrales de movimiento.....	33
1.5.4 Órbitas en galaxias elípticas	34
1.5.5 Formas de galaxias elípticas y la Inestabilidad de Órbita Radial (ROI) ...	41
Capítulo 2 Simulaciones de N -cuerpos.....	44
2.1 Conceptos básicos y antecedentes históricos.....	44
2.2 Planteamiento. Regímenes colisional y no colisional	46
2.3 Tiempo colisional y tiempo dinámico	48
2.4 Códigos de N -cuerpos.....	53
2.4.1 Método de suma directa.....	55

2.4.2 Códigos de árbol.....	57
2.4.3 Códigos con expansión en funciones armónicas	60
2.4.4 Códigos de malla	61
Capítulo 3 Extracción orbital de simulaciones de sistemas no colisionales formados por colapso frío.....	63
3.1 Antecedentes del proyecto	63
3.2 Objetivo y motivación	64
3.3 Herramientas principales	65
3.3.1 Elección del código de N -cuerpos (GYRFALCON).....	66
3.3.2 El extractor orbital (EXTRILLA)	69
3.3.3 El clasificador orbital (TAXON).....	71
3.4 Simulaciones de N -cuerpos de colapsos fríos y modelos	72
3.4.1 Configuración inicial en equilibrio y pruebas preliminares	73
3.4.2 Condiciones iniciales de desequilibrio virial.....	77
3.4.3 Optimización de parámetros (ϵ, θ) y construcción de modelos fríos.....	79
3.4.4 Colapso bajo condiciones frías y relajación de modelos	82
3.4.5 Formas finales de los esferoides resultantes.....	87
3.5 Integración, extracción y clasificación de órbitas	93
3.5.1 Los modelos 1A y 1B, condiciones iniciales	94
3.5.2 Integración numérica de los modelos 1A y 1B con GYRFALCON.....	96
3.5.3 Conservación de parámetros globales en los modelos 1A y 1B.....	98
3.5.4 Conservación de energías de partículas individuales en los modelos 1A y 1B	101

3.5.5 Extracción de órbitas en los modelos 1A y 1B	104
3.5.6 Clasificación de órbitas en los modelos 1A y 1B	107
3.5.7 Modelos extendidos 2A y 2B	113
3.5.8 El modelo 4A.....	125
 Capítulo 4 Conclusiones	 129
 Referencias.....	 132

Capítulo 1 Galaxias elípticas y dinámica estelar

1.1 Introducción

Las galaxias son las unidades estructurales fundamentales del Universo observable a gran escala. Constituidas por miles de millones de estrellas unidas por la gravedad, se les encuentra por doquier individualmente, en pequeños grupos o en grandes cúmulos, en cualquier dirección del Universo.

Con base en una sólida tradición observacional (p. ej. los Herschel, Lord Rosse) en los siglos XVIII y XIX, el inicio del siglo XX marca el momento histórico donde las galaxias son reconocidas finalmente en su verdadera naturaleza de sistemas estelares extragalácticos. Era obvio que tales “nebulosas” mostraban al telescopio una variedad importante de formas y estructura interna. Algunas no parecían tener forma alguna; otras indicaban la presencia de una elegante estructura espiral y unas más aparecían en la placa fotográfica como sistemas francamente esféricos.

En los inicios mismos del desarrollo de un esquema de clasificación galáctica en los años veinte, previo al establecimiento definitivo del sistema actual con galaxias espirales normales y barradas, elípticas e irregulares, Edwin Hubble (1922) discute en su artículo la interesante variedad de formas y propiedades observacionales de estos objetos astronómicos. Después de identificar a un subgrupo de galaxias de morfología simple, da el nombre de *nebulosas globulares* y *nebulosas aovadas*¹ a dos tipos particulares de objetos con forma claramente esferoidal como M87 y M49 (las globulares) o elipsoidal como M32 y M59 (las aovadas). Las aovadas y otro tipo más de galaxias llamadas por el astrónomo *nebulosas de huso* (“spindle”, que no son más que espirales vistas de perfil), serían referidas en su trabajo con el nombre

¹ La expresión en inglés es “ovate nebulae”.

genérico de *nebulosas elongadas* (Figura 1.1). El hecho es que específicamente a través de los sistemas globulares y los aovados Hubble estaba ya describiendo lo que eventualmente llegaríamos a conocer formalmente como *galaxias elípticas* en sus distintas variedades, desde las E0 hasta las E7 (Hubble 1926). De acuerdo al astrónomo, este sistema de clasificación estaba “basado principalmente en las formas estructurales de las imágenes fotográficas” obtenidas de dichos sistemas estelares con el poderoso reflector de 2.5 m de diámetro del Observatorio de Monte Wilson (EUA), y hace notar que la razón de los ejes principales en estas galaxias puede variar entre 1 y 0.25.

II. Non-galactic nebulae	
1. Spiral	M 101 (N.G.C. 5457, 8)
2. Elongated	
a) Spindle	HV 24 (N.G.C. 4565)
b) Ovate	M 59 (N.G.C. 4621)
3. Globular	M 87 (N.G.C. 4486)
4. Irregular	N.G.C. 2366

Fig. 1.1. En su artículo de 1922 en *The Astrophysical Journal* “A General Study of Diffuse Galactic Nebulae”, página 168, al clasificar las nebulosas no galácticas Edwin Hubble introduce las categorías *globular* y *aovada* para describir sistemas de apariencia esférica y elipsoidal, respectivamente. Estas variedades son de hecho la primera aproximación del astrónomo norteamericano a los distintos tipos de *galaxias elípticas* introducidos por él mismo años más tarde.

Por otro lado, además de su redondeada apariencia, los sistemas estelares elípticos están caracterizados por ser estructuras homogéneas, donde el brillo superficial cae suavemente del centro a la periferia. Asimismo, y a diferencia de las galaxias espirales, las elípticas carecen de estructura superficial y de un disco. Estadísticamente, la fracción de galaxias elípticas en el Universo está correlacionada con la densidad local, de tal manera que estos sistemas representan sólo un 10% de la población en regiones de baja densidad galáctica, pero son muy abundantes (40%) hacia los centros de cúmulos galácticos densos (Binney y Tremaine 2008).

1.2 Isofotas y elipticidad

Una vez que fue posible medir el brillo superficial de galaxias por métodos fotométricos y obtener sus isofotas correspondientes (contornos de brillo superficial constante), estas resultaron tener forma aproximadamente elíptica en las nebulosas aovadas de Hubble, con semiejes a y b . Actualmente sabemos que, efectivamente, la población de galaxias elípticas en el Universo muestra una razón de ejes que va desde 1 hasta alrededor de 0.3. La *elipticidad* de estos sistemas definida como

$$\varepsilon \equiv 1 - \frac{b}{a} \quad (1.1)$$

permite así el sistema de clasificación E0, E1, E, ..., E n , donde las galaxias elípticas más esféricas (E0) son aquellas con $\varepsilon = 0$, mientras que las más elongadas (E7) tienen $\varepsilon \sim 0.7$ si la razón de ejes es expresada a su vez como $b/a = 1 - \frac{n}{10}$.

Hay que hacer notar, sin embargo, que las observaciones en realidad nos dan información del brillo superficial *proyectado* de la galaxia en cuestión, el cual depende de la orientación espacial del sistema, lo que nos impide en principio conocer su forma intrínseca. La Figura 1.2 incluye los distintos tipos de galaxias elípticas de acuerdo a su elipticidad observada.

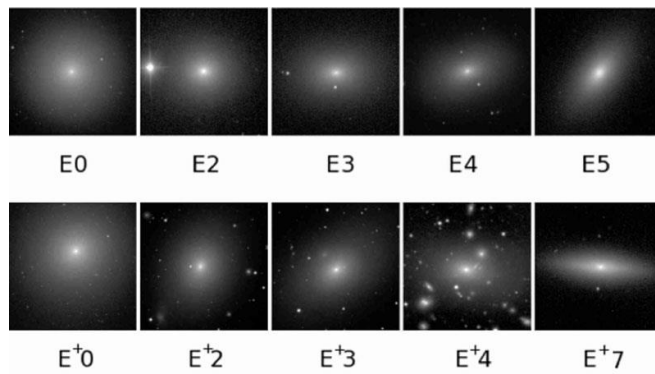


Fig. 1.2. Los distintos tipos de galaxias elípticas basados en el parámetro de elipticidad (ε). Arriba: serie de galaxias en la clasificación clásica de Hubble, de E0 a E5. Abajo: serie similar de galaxias de acuerdo a la clasificación de de Vaucouleurs (E^+) de elípticas tardías, con la cual pretendía hacer una transición suave hacia las galaxias lenticulares S0 (de Vaucouleurs 1959). Tomado de Buta (2011).

1.3 Cinemática

El claro contraste entre galaxias elípticas esféricas y elongadas hizo sospechar que estas diferencias morfológicas podrían ser físicamente justificadas en función de la cinemática particular de las estrellas constituyentes de cada una de estas variedades de elípticas. Por ejemplo, y en analogía con objetos astronómicos elongados a escala planetaria como Saturno, llegó a suponerse hasta antes de 1975 que la forma de las elípticas más elongadas podría explicarse a través de una rápida rotación que, como en Saturno y por efectos de poderosas fuerzas centrípetas, provocaría que el ecuador de tales galaxias se ensanchara, deformándolas.

El primer intento por determinar la curva de rotación de una galaxia elíptica mostró que, sorprendentemente, las galaxias elípticas más luminosas rotan muy poco (Bertola y Capaccioli 1975). El reto de medir la cinemática interna de estos objetos por métodos espectroscópicos era enorme, considerando lo complicado que resulta identificar y medir sus líneas de absorción, particularmente en sus partes externas, aun con el mayor telescopio del mundo en esa época (el reflector de 5 m de Monte Palomar). Una década antes del trabajo de Bertola y Capaccioli (1975), sólo existían datos observacionales de la dispersión de velocidades en los núcleos de un reducido número de elípticas (p. ej. Minkowski 1961; Walker 1962).

Años más tarde y basado en los datos cinemáticos disponibles de galaxias elípticas, Binney (1978) concluyó que estos son consistentes con galaxias cuyas formas intrínsecas pueden ser descritas por esferoides prolatos donde sólo existe una débil correlación entre elipticidad observada y rotación. Es decir, era ya evidente que la rotación no jugaba un papel importante en la morfología de por lo menos las galaxias elípticas más brillantes.

De hecho, una manera de caracterizar cuantitativamente este problema es definiendo el cociente

$$\frac{v_{los}}{\sigma_{los}}, \quad (1.2)$$

donde v_{los} es la velocidad observada a lo largo de la línea de visión a la galaxia y σ_{los} su dispersión correspondiente.

Promediando parámetros y considerando la elipticidad resultante del sistema como función de tal cociente, se obtiene

$$\left(\frac{v}{\sigma}\right)^*, \quad (1.3)$$

el cual resulta ser un excelente parámetro para medir el efecto de la rotación en la elongación observada de las galaxias (Binney y Merrifield 1998). Considerando que tal elongación es el resultado del balance entre el movimiento ordenado y azaroso de sus estrellas, se esperaría que $(v/\sigma)^* \approx 1$ si la rotación jugara un papel importante en la elipticidad de las galaxias. Los resultados indican que este cociente, casi independiente de la orientación en sistemas oblatos, tiene un valor medio de 0.4 en las elípticas más brillantes, indicando que efectivamente rotan muy lentamente (de Zeeuw y Franx 1991).

Fue de nuevo Binney (1976) quien, discutiendo si la rotación juega un papel real en el aplastamiento observado de las galaxias elípticas e invocando el mecanismo no disipativo de relajamiento violento en la formación galáctica (ver Capítulo 2), sugirió que son las anisotropías en la distribución de velocidades iniciales introducidas por este mecanismo las que justifican físicamente el aplastamiento de las elípticas más brillantes, independientemente de si estas rotan o no.

Contrastando con estos resultados, las galaxias elípticas de brillo intermedio ($-20 < M_B < -18$) dan muestra clara de que, al contrario de sus parientes más brillantes, su elongación sí es atribuible mayormente a la rotación, considerando que en ellas $(v/\sigma)^* \approx 1$. Las rápidas velocidades de rotación de esta variedad de elípticas son comparables de hecho a las de los bulbos de galaxias espirales (p. ej. Mc Elroy 1983), consistentes con rotadores oblatos isotrópicos.

Finalmente, en el régimen de baja luminosidad de la población de elípticas se revierte la tendencia anterior de rotadores rápidos y se encuentra que, por ejemplo, galaxias elípticas enanas con $M_B > -18$ e incluso gran elipticidad evidencian muy poca rotación (Bender y Nieto 1990), pues $(v/\sigma)^* < 1$ en ellas. Estos resultados sin duda complican, por lo menos, el objetivo de un modelo general para la rotación en elípticas si es que este existe.

1.4 Perfil de brillo superficial

Como ya se ha dicho, la fotometría de las galaxias elípticas había mostrado que su brillo superficial decrece suavemente de sus centros a sus partes externas. Una pregunta elemental surgía entonces: ¿estas galaxias obedecen un perfil particular de brillo superficial? El patrón de flujo luminoso de otros sistemas estelares esféricos en el Universo como los cúmulos globulares en la Vía Láctea es, cualitativamente hablando, muy similar al de las galaxias elípticas, pues al igual que estas, aquellos son más brillantes hacia el centro que hacia la periferia. Una galaxia elíptica esférica sería entonces, en una primera aproximación, un modelo a gran escala de un cúmulo globular. ¿Tendrían entonces ambos objetos un perfil de brillo similar?

Al estudiar en detalle cómo decae el flujo luminoso de una galaxia elíptica como función del radio a lo largo, digamos, de su eje mayor, se encontró que hacia sus partes internas los datos observacionales del brillo superficial podrían aproximarse por una ley de potencias de la forma $I \sim R^{-0.8}$, mientras que lejos del centro del sistema la relación tomaba la forma $I \sim R^{-1.7}$ (Binney y Merrifield 1998). A pesar de esta buena aproximación, pudo confirmarse que el brillo superficial de las elípticas cambia en función del radio de acuerdo a una única relación empírica propuesta por de Vaucouleurs (1948) que es válida en un amplio intervalo radial. El perfil de de Vaucouleurs, también conocido simplemente como la ley $R^{1/4}$, está dado por

$$I(R) = I_e 10^{\{-3.33[(R/R_e)^{1/4}-1]\}}, \quad (1.4)$$

donde R_e es el *radio efectivo* (radio de la isofota dentro de la cual está contenida la mitad de la luminosidad total de la galaxia) e I_e es el brillo superficial de la galaxia en $R = R_e$.

Burkert (1993) ha mostrado que el perfil de de Vaucouleurs describe adecuadamente la distribución de brillo observado en elípticas en el intervalo $0.1R_e \leq R \leq 1.5R_e$. Aunque algunos sistemas parecen no ajustarse estrictamente a esta relación, la ley $R^{1/4}$ es, hoy por hoy, la mejor manera de caracterizar radialmente la variación del brillo superficial observado del grueso de la población de galaxias elípticas, y es por lo tanto ampliamente utilizada con este propósito.

La ley $R^{1/4}$ describe brillo superficial como función del radio. Al tratar de entender los procesos de formación y evolución de galaxias elípticas desde un punto de vista teórico, es importante entender, por ejemplo, la variación radial de parámetros fundamentales como la densidad estelar en dichos sistemas, por lo que existen varios intentos por caracterizar esta variación tomando como referencia el perfil de de Vaucouleurs: en otras palabras, derivar formas analíticas simples para la densidad de una galaxia como función del radio consistentes con la ley $R^{1/4}$ para el brillo superficial.

Se han propuesto otros perfiles para describir el brillo superficial de las elípticas, siendo el perfil de Hubble (1930) y el de King (1966) dos de los más importantes. La Figura 1.3 compara los perfiles de de Vaucouleurs y de King, donde a pequeños radios el perfil $R^{1/4}$ tiende a seguir creciendo mientras que el de King tiende a aplanarse. A grandes radios la pendiente del perfil de King es más pronunciada. Además de describir correctamente los perfiles de brillo de galaxias elípticas en un amplio intervalo de radios galácticos, el perfil de de Vaucouleurs presenta una ventaja observacional importante sobre otros modelos, y es que su radio efectivo R_e en galaxias cercanas es normalmente más grande que 1 segundo de arco, por lo que los efectos de la turbulencia atmosférica y consecuentemente de un mal *seeing* no interfieren en su determinación por métodos observacionales directos. Por el contrario, los radios efectivos en los modelos de Hubble y King son más pequeños y comparables al error por *seeing*, lo que hace más difícil su estimación.

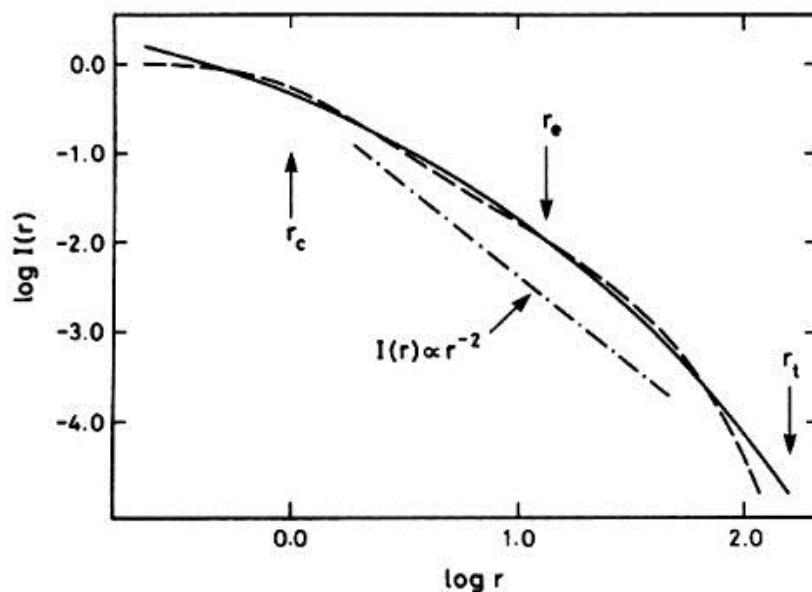


Fig. 1.3. Perfil de brillo superficial de una galaxia elíptica como función del radio de acuerdo al modelo de de Vaucouleurs (línea continua) y de King (línea de trazos). La pendiente del perfil $R^{1/4}$ tiende a seguir creciendo a pequeños radios. El radio efectivo (R_e) del perfil de de Vaucouleurs es más grande que su equivalente en el perfil de King (R_c), lo que facilita su determinación por métodos observacionales. Adaptado de King (1966).

Aunque no existe una solución analítica para desproyectar directamente un perfil de de Vaucouleurs en un perfil de densidad de masa (Young 1976), sí hay varias aproximaciones importantes en la literatura de gran utilidad en este sentido, incluyendo el modelo de distribución de masa de Hernquist (1990), utilizado en este trabajo y discutido en el Capítulo 3.

1.5 Dinámica estelar

Las galaxias son vastos sistemas estelares autogravitantes, es decir, sistemas que adquieren y mantienen una forma y estructura determinada como resultado de la atracción gravitacional mutua entre sus estrellas constituyentes. En principio y en el sentido más básico, las estrellas de una galaxia idealizadas como puntos masa obedecen la famosa y relativamente simple

relación descubierta por Newton entre masa y distancia traducida en una fuerza de atracción gravitacional. Aplicada a un número N de partículas en un sistema autogravitante, es decir, en el contexto de la solución al problema de N -cuerpos (discutido en detalle en el Capítulo 2), esta relación queda expresada como

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \quad (1.5)$$

donde \vec{r}_j es el vector de posición de la j -ésima partícula al tiempo t , m_j es su masa, G es la constante gravitacional y el punto indica la derivada con respecto al tiempo (Heggie y Hut 2003).

1.5.1 Ecuación de Poisson y ecuación de Boltzmann

Las estrellas en una galaxia, además de satisfacer la relación fundamental anterior, pueden distribuirse espacialmente de formas muy distintas dentro de ella. Una distribución determinada de masa estelar en una galaxia da origen a un determinado perfil de densidad, que es posible conocer *a priori* o postular matemáticamente. Además, puede demostrarse que un *perfil de densidad* $\rho(\mathbf{x})$ determinado, dependiente en general de la posición dentro de la galaxia, dará origen a un determinado *potencial gravitacional* $\Phi(\mathbf{x})$, el cual definirá como un todo la dinámica de las estrellas sometidas a su influencia. Así, la primera de las dos ecuaciones más importantes de la dinámica estelar conecta estas dos funciones.

La *ecuación de Poisson* relaciona el potencial gravitacional con su origen físico, la masa, y más específicamente la densidad de masa, como

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (1.6)$$

donde el operador laplaciano ∇^2 hace de esta una ecuación diferencial que puede resolverse para $\Phi(\mathbf{x})$ a partir de $\rho(\mathbf{x})$ con las condiciones a la frontera adecuadas, que en el caso de un sistema aislado es que $\Phi \rightarrow 0$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ (Binney y Tremaine 2008).

La ecuación de Boltzmann es la segunda relación fundamental de la dinámica estelar. En general podemos decir que probablemente es la ecuación más importante para describir el comportamiento de distintos tipos de fluidos. Introducida por Ludwig Boltzmann en 1872 en

el campo de la Teoría de Transporte, y aunque no representa una ley fundamental de la Física, la ecuación de Boltzmann tiene una amplia aplicación al describir correctamente la física de gases a densidades y temperaturas medias y bajas. La versatilidad que ofrece esta ecuación está justificada por tratarse de la expresión matemática de un principio muy simple: *el cambio temporal de algo en una región infinitesimal, es igual al imbalance en el flujo de ese algo a través de la frontera de la región de interés, más la acción de fuentes menos la acción de sumideros locales* (Aguilar 2012).

En Mecánica Clásica sabemos que el movimiento de una partícula queda perfectamente determinado si conocemos las fuerzas que actúan sobre ella y su posición y velocidad a un instante dado. El formalismo newtoniano no impide de ninguna manera que muchas partículas puedan pasar por un mismo punto del espacio físico tridimensional durante sus trayectorias; sin embargo, si introducimos el concepto de *espacio fase* como aquel constituido por 6 coordenadas, es decir las tres espaciales más las tres componentes de la velocidad, entonces sólo una partícula puede pasar por este punto del espacio fase. Esto hace del espacio fase el escenario ideal para describir órbitas, como veremos en la Sección 1.5.3.

La *ecuación de Boltzmann* es formalmente una ecuación de transporte que describe la evolución en el tiempo de un sistema dinámico en el espacio fase:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} \quad (1.7)$$

En esta relación matemática, la función de distribución en el espacio fase $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es un concepto esencial, pues contiene toda la información dinámica del sistema en cuestión. Esta función nos conecta con la forma en la que la materia está distribuida dentro de una galaxia, i.e., con la densidad espacial discutida arriba, pues la proyección de f en el espacio de configuración es precisamente tal densidad:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}. \quad (1.8)$$

Interpretada en términos simples, la ecuación de Boltzmann establece que si nos concentramos en una región infinitesimal localizada en un punto determinado del espacio fase, el cambio en el número de partículas en el interior del volumen es igual al debido al flujo de las partículas a

través de la superficie que limita tal región, a las colisiones entre las partículas del sistema que meten o sacan partículas de la región, más el efecto de fuentes y sumideros locales.

En la ecuación, los términos a la izquierda de la igualdad representan el flujo de partículas —debido al potencial suave— a través de la región limítrofe del volumen infinitesimal en el espacio fase, mientras que el lado derecho de la misma contiene el llamado *término colisional*. Este término mete y saca partículas de la región debido a las interacciones de 2 cuerpos entre estas, normalmente en una escala de tiempo muy corta.

Es interesante notar que el lado izquierdo de la ecuación que mide el flujo de partículas y el lado derecho que mide entrada y salida de partículas de la región por colisiones, cada uno define una escala temporal que será de utilidad más adelante cuando definamos los regímenes colisional y no colisional. El lado izquierdo de la ecuación define naturalmente el *tiempo dinámico* de un sistema de partículas, que es básicamente el período orbital de las mismas. Podemos aproximar esta escala de tiempo como

$$t_{\text{din}} \sim R/v_{\text{rms}}, \quad (1.9)$$

es decir como la razón del radio del sistema sobre la velocidad rms.

Por su parte, el lado derecho de la ecuación define el llamado *tiempo colisional*, el cual está dado como

$$t_{\text{col}} \sim (R/v_{\text{rms}})N / \ln(N), \quad (1.10)$$

donde N es el número de partículas en el sistema (Aguilar 2005). Por otro lado, el cociente de t_{col} sobre t_{din} es de gran utilidad pues resulta ser una muy buena medida del grado de colisionalidad de un sistema de partículas:

$$t_{\text{col}} / t_{\text{din}} \sim N / \ln(N). \quad (1.11)$$

Este resultado es en cierto sentido sorpresivo, pues todas las unidades físicas involucradas se cancelan para arrojar un cociente que depende exclusivamente del número de partículas (N) del sistema. Si suponemos que $N \gg 1$, entonces la razón $N/\ln(N)$ también lo será, lo que implica que en el cociente $t_{\text{col}} / t_{\text{din}}$, el tiempo requerido para que las colisiones sean importantes (t_{col}) es muy grande. Esto naturalmente significa que las colisiones en el sistema son despreciables

y entonces podemos hablar de un escenario no colisional. En pocas palabras, para lograr que en un sistema las colisiones entre sus partículas constituyentes sean irrelevantes, hay que elevar el número de tales partículas. Entre más grande N , menos colisional será el sistema.

La intuición nos dice, por otro lado, que si el número de partículas crece, también habrá más colisiones, lo cual parece contradecir el resultado anterior. El hecho es que la intuición no nos miente pues, efectivamente, el número de colisiones entre partículas aumentará si N es más grande. Sin embargo, podemos utilizar un argumento sencillo para verificar que al mismo tiempo que las colisiones aumentan, su efecto neto se reduce: imaginemos un sistema de N partículas de masa m y que luego partimos a la mitad cada una de ellas. Así, terminaremos con $2N$ partículas con la mitad de su masa original cada una. Al pasar de N a $2N$, el número de colisiones aumentará naturalmente entre las partículas que ahora tendrán una masa de $m/2$. El hecho es que, como la fuerza de gravedad entre partículas depende del producto de sus masas, el efecto de reducirlas a la mitad (efecto por masa) domina sobre el efecto de multiplicarlas por dos (efecto por colisión) en un espacio tridimensional. En una situación como la de las simulaciones presentadas en este trabajo, queremos reducir el relajamiento por colisiones lo más posible en nuestras configuraciones de partículas, por lo tanto buscaremos hacerlas menos colisionales adoptando un N suficientemente grande.

Así, al hacer a nuestro sistema no colisional, el término a la derecha de la ecuación original de Boltzmann será nulo y por lo tanto aquella adquirirá la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 , \quad (1.12)$$

una ecuación diferencial parcial que junto con la ecuación de Poisson y las condiciones a la frontera adecuadas —determinadas en principio por las observaciones— podría resolverse (Aguilar 2005). En situaciones realistas como las encontradas en astronomía, usualmente es muy difícil obtener tal solución, por lo que se siguen otras alternativas. Una particularmente útil es aquella donde se reescribe la ecuación de Boltzmann en su forma primitiva, con el entendimiento de que una fuerza conservativa como la gravedad (o equivalentemente la aceleración debida a ella) siempre puede obtenerse del gradiente negativo de un potencial, gravitatorio en este caso:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{Df}{Dt} = 0. \quad (1.13)$$

Reescrita así, la ecuación nos dice que la función de distribución es constante en el tiempo al movernos a lo largo de trayectorias dinámicas. Si además de esto nuestro sistema de partículas se encuentra en estado estacionario, o sea si el potencial gravitacional es constante en el tiempo, las trayectorias dinámicas mencionadas se vuelven órbitas invariantes y la función de distribución f debe ser función de ciertas cantidades (I_i) que se conservan en el tiempo, es decir:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(I_i), \quad (1.14)$$

donde $I_i(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ es tal que $DI_i/Dt = 0$. En esta ecuación, I_i son llamadas las *integrales de movimiento* de las órbitas del sistema, cantidades físicas como la energía o momento angular que permanecen constantes en sistemas autogravitantes como las galaxias y cúmulos estelares bajo determinadas restricciones.

1.5.2 Equilibrio virial y procesos de relajamiento

Un sistema autogravitante de N partículas se dice estar en equilibrio dinámico o *equilibrio virial* si satisface la relación

$$\frac{2T}{|W|} = 1, \quad (1.15)$$

donde T es la energía cinética total del sistema dada por la suma de las energías cinéticas de sus partículas constituyentes

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1,N} m_i |\mathbf{v}_i|^2, \quad (1.16)$$

y W es su energía potencial total

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} G m_i m_j / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 \quad (1.17)$$

La relación $2T/|W|=1$, originalmente planteada por Clausius en 1870 en el contexto de sus estudios de la naturaleza mecánica del calor, expresada también como $2T + W = 0$, es conocida como el *teorema del virial*: “el vis viva promedio de un sistema es igual a su virial”. Aquí “vis viva” es la energía cinética y el término que Clausius llamó el “virial” puede representarse en términos de las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema, que resultan ser igual a $\frac{1}{2}$ la energía potencial promedio del mismo si el sistema es autogravitante (Collins 1978). El teorema del virial es quizá la propiedad dinámica astronómicamente más importante de un sistema en equilibrio (Saslaw, 2001).

Los sistemas de partículas en equilibrio virial son estables en el sentido de que permanecen unidas gravitacionalmente al sistema como un todo mientras se mueven a distintas velocidades. El sistema no evoluciona ni en forma ni en tamaño pues el potencial gravitacional es constante en el tiempo y ha alcanzado un *estado estacionario*. Sin embargo, existe la posibilidad de que una configuración de partículas se encuentre fuera de equilibrio virial, lo que producirá evolución en el tensor de inercia. Tal desequilibrio puede implicar un colapso ($2T/|W| < 1$) o una expansión ($2T/|W| > 1$) del sistema.

Es por lo tanto de importancia crucial el entender cómo un conjunto de partículas unidas por la gravedad y moviéndose a distintas velocidades, en analogía con un enjambre de abejas, puede alcanzar dicho estado de equilibrio entre sus energías cinética y potencial. ¿Cómo llegar a tal configuración partiendo de una situación de desequilibrio? La respuesta viene dada por los *procesos de relajamiento* en sistemas estelares, entendidos como “los procesos por los que un sistema físico adquiere el equilibrio, o vuelve a él después de una perturbación” (van den Bosch 2005).

Los procesos de relajamiento que discutiremos en esta sección son procesos no colisionales, entendidos como en la Sección anterior (1.5.1) donde las colisiones o encuentros cercanos entre partículas no juegan un papel importante, y donde estas son consideradas masas puntuales. Estos procesos son estrictamente reversibles en el tiempo, aunque cabe aclarar que puesto que estos actúan sobre la llamada distribución de densidad gruesa (“coarse distribution”) en el espacio fase, que no es reversible en el tiempo, el resultado es la pérdida de información de las condiciones iniciales de las que partió el sistema en proceso de relajamiento (Aguilar 2010).

Como antecedente, sin embargo, empecemos analizando las rutas al relajamiento via colisiones para comprobar por qué estas no pueden justificar la virialización de las galaxias.

1.5.2.1 Relajamiento colisional

El relajamiento colisional es el primero de los procesos que discutiremos, una vez que es claro que las colisiones entre partículas son un mecanismo natural por el que un ensamble de masas puntuales puede “perder memoria” de sus condiciones iniciales. La idea central del relajamiento colisional es que una partícula P que se mueve sobre el fondo de otras partículas verá afectada su trayectoria por colisiones con estas. Una minoría de estas colisiones se deberán a los encuentros con partículas que se acercan mucho físicamente (colisiones “fuertes”), pero la gran mayoría estarán dadas por partículas más lejanas (colisiones “débiles”) que aunque individualmente provocan un cambio ínfimo en la trayectoria de P , la suma de todas ellas puede ocasionar una variación importante.

Colisiones fuertes. Una colisión o encuentro fuerte es entendido como aquel en el que en un solo evento, el cambio producido en la energía potencial de las partículas es tan significativo que llega a ser de la misma magnitud o incluso mayor que la energía cinética antes del encuentro, es decir, donde

$$\frac{Gm^2}{r} \geq \frac{mv^2}{2} , \quad (1.18)$$

lo cual implica que la separación máxima entre partículas, interpretada como el “radio de encuentro fuerte” es

$$r_s \equiv \frac{2Gm}{v^2} . \quad (1.19)$$

Esta ecuación aplicada al vecindario solar, donde la masa estelar promedio es de 0.5 masas solares y la velocidad relativa promedio entre estrellas es de 30 km s^{-1} , nos arroja un radio de encuentro fuerte de $r_s \sim 1 \text{ ua}$ (1 unidad astronómica). Es decir, para que existiera un encuentro fuerte entre estrellas en el vecindario solar, se necesitaría que estas llegaran a aproximarse una unidad astronómica o menos unas de otras. Como la separación media entre estrellas del

vecindario solar es de ~ 1 pc, podemos decir que los encuentros fuertes simplemente no son comunes en nuestra zona de la Vía Láctea, ni en muchas otras con densidad estelar semejante, excepto desde luego la región más central de la Galaxia.

Por otro lado, el tiempo promedio entre colisiones fuertes (t_s) está dado por

$$t_s = \frac{v^3}{4\pi G^2 m^2 n} , \quad (1.20)$$

donde n es la densidad estelar numérica. De nuevo, para el vecindario solar $n \sim 0.1 \text{ pc}^{-3}$, por lo que el tiempo promedio entre colisiones es $t_s \sim 10^{15}$ años, mucho mayor que la edad del Universo mismo. Este resultado confirma que las colisiones fuertes sencillamente no ocurren en el vecindario solar y por lo tanto que su efecto es prácticamente nulo en cuanto a representar un mecanismo de relajamiento estelar. Podemos generalizar este resultado, dadas las dispersiones de velocidades, masas estelares y densidades típicas de las galaxias, y concluir que en ellas las colisiones fuertes son despreciables.

Colisiones débiles. Como ya se ha mencionado, las partículas más lejanas ejercen una influencia insignificante si son consideradas individualmente, pero su efecto sobre una partícula es acumulativo y llega a ser importante si se toman en cuenta muchas de ellas: en otras palabras, si se considera el escenario realista de un sistema estelar populoso como lo es una galaxia.

Para estimar tal efecto acumulativo, la aproximación de impulso es la manera más simple de analizar un encuentro individual (Figura 1.4). En esta aproximación, una estrella E en reposo tiene un encuentro con otra estrella de masa m que se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal con velocidad constante v , de tal forma que la distancia de máximo acercamiento entre las dos estrellas es p . Debido a la presencia de E, la segunda estrella sufrirá una pequeña deflexión α respecto a su trayectoria original recta dada por

$$\alpha = \frac{2Gm}{pv^2} , \quad (1.21)$$

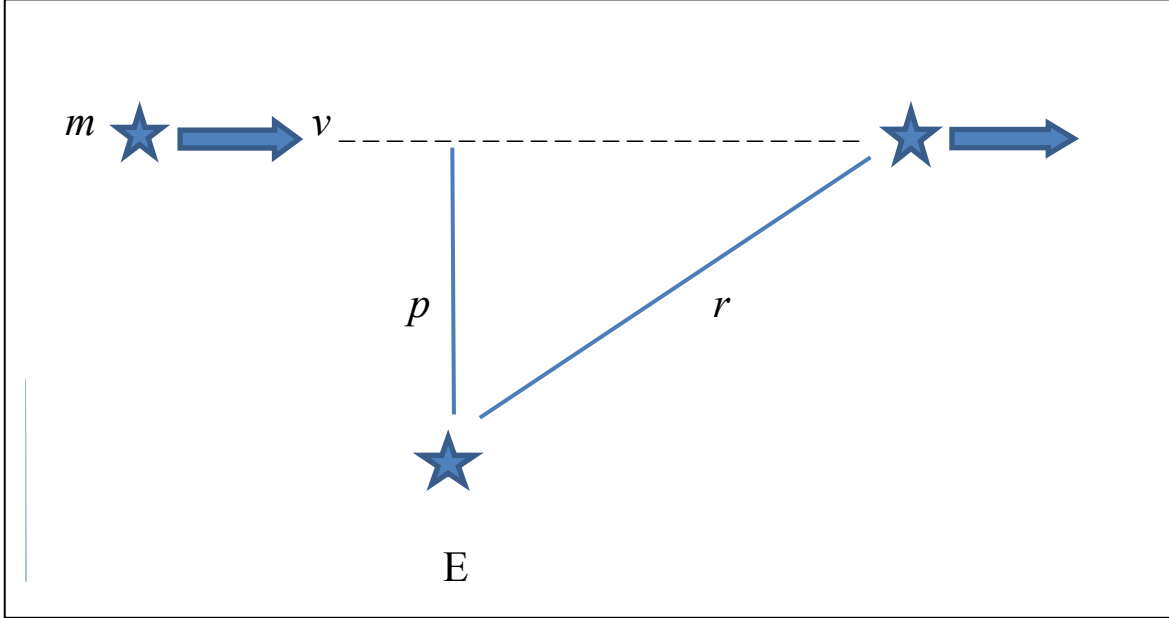


Fig. 1.4. Aproximación de impulso, donde dos estrellas tienen un encuentro “débil”. Una de ellas tiene masa m y se mueve en línea recta con velocidad constante v . La máxima aproximación entre los dos objetos está dada por p . Las estrellas sufren deflexiones respecto a sus trayectorias originales resultado de tales interacciones.

Nuestro objetivo será determinar el efecto acumulado de los múltiples encuentros de m con otras estrellas, sabiendo que después de cada una de estas colisiones suaves, las estrellas sufrirán deflexiones en sus trayectorias de distinta magnitud y con muy diversas orientaciones espaciales. Después de tomar en cuenta el efecto cuadrático acumulado de todos estos encuentros, es posible definir el *factor de Coulomb*

$$\Lambda = \frac{Rv^2}{2Gm}, \quad (1.22)$$

donde R es el radio del sistema, para así llegar a establecer una escala de tiempo colisional (t_{col}) que mide el efecto acumulado de tales encuentros

$$t_{\text{col}} = \frac{v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda} = \frac{t_s}{2 \ln \Lambda}. \quad (1.23)$$

Dado que $\ln \Lambda > 1$, podemos inferir que $t_{\text{col}} < t_s$, es decir, que el efecto acumulado de los encuentros suaves domina al efecto de los encuentros fuertes. Tomando los valores típicos para las densidades y velocidades estelares promedio, así como las distancias interestelares promedio,

$$t_{\text{col}} \sim 10^{14} \text{ años.}$$

Esta escala temporal, aproximadamente un factor de 10 menor que la escala de tiempo de los encuentros fuertes, es aún mayor que la edad del Universo, con lo que se comprueba que los encuentros débiles tienen igualmente un papel despreciable como mecanismo de relajamiento en las galaxias. En conclusión, las galaxias se reafirman definitivamente como sistemas no colisionales.

1.5.2.2 Mezclado de fase y relajamiento violento

Como ya hemos mostrado, el cociente $t_{\text{col}}/t_{\text{din}}$ es una buena medida del grado de colisionalidad de un sistema; además, este cociente resulta estar en función únicamente del número de partículas N . De esta manera:

- a) Si $t_{\text{col}}/t_{\text{din}} > 1$ (N grande), esto significa que una estrella en una galaxia real cubrirá muchos períodos orbitales antes de que su trayectoria sea significativamente afectada por encuentros cercanos (“fuertes”) o lejanos (“débiles”). Si este es el caso, el sistema es entonces no colisional.
- b) Si $t_{\text{col}}/t_{\text{din}} < 1$ (N pequeño), entonces implicamos que la estrella muy probablemente no podrá cubrir un solo período orbital sin que su trayectoria se vea afectada severamente por dichos encuentros. Se trata entonces de un escenario colisional.

Las galaxias son sistemas estelares autogravitantes con muchísimas estrellas ($N \gg 1$), y de acuerdo a nuestro razonamiento, esto crea condiciones ideales de no colisionalidad. Pero si los encuentros cercanos o lejanos entre las estrellas de una galaxia juegan un papel esencialmente nulo como mecanismo de relajamiento, ¿cómo es que las galaxias observadas en el Universo han alcanzado el estado estacionario, relajado en el que se les encuentra hoy, donde su cociente

virial es $2T/|W| \sim 1$? El interrogante, planteado por primera vez por Zwicky (1939), apuntaba a una investigación meticulosa de los procesos de relajación operantes en configuraciones no colisionales, particularmente en galaxias.

Mezclado de fase. El mezclado de fase (“*phase mixing*”) es el modelo más simple de relajamiento en sistemas no colisionales (Merritt 1999). Actúa generalmente en tiempos mucho más cortos que el tiempo colisional, y aunque no produce un relajamiento verdadero —pues no cambia la energía ni el momento angular del sistema—, sí cumple la función de hacer perder información de las condiciones iniciales del mismo (Aguilar 2010). El mezclado de fase se refiere a la mezcla y dispersión de partículas en el espacio fase debidas a la variación de los periodos dinámicos de estas con la posición en tal espacio. Puntos que originalmente estaban muy próximos, después de un determinado número de periodos tienden a llenar toda la región del espacio fase que les es accesible, con la restricción impuesta por la ecuación de Boltzmann no colisional (ver ecuación 1.13 en la Sección 1.5.1), es decir, la constancia de la función de distribución en el tiempo a lo largo de trayectorias dinámicas. Al evolucionar hacia una configuración más relajada conforme el mezclado de fase tiene lugar, la entropía del sistema aumenta (Binney y Tremaine 2008).

Hay que señalar que aunque en principio el sistema es reversible en el tiempo y podría regresar a las condiciones iniciales, el mezclado constante hace que la información sobre tales condiciones se vaya “ocultando” en escalas cada vez menores, lo que significa que cualquier observación del sistema, limitada en resolución, finalmente perderá información de las condiciones originales de las que este partió. En este sentido, enfatizaremos que desde un punto de vista estrictamente matemático, los sistemas newtonianos son reversible en el tiempo, por lo que es posible en principio recuperar sus condiciones iniciales, de lo que se implica que en ellos no hay formalmente relajación. Por el contrario, en los sistemas físicos reales la relajación es un hecho, dada nuestra imposibilidad de recuperar sus condiciones iniciales con la resolución finita de nuestras simulaciones numéricas.

Relajamiento violento. El perfil de brillo suave y simétrico de las galaxias elípticas indica que se trata de sistemas relajados, pero ya hemos visto que el relajamiento colisional no puede ser invocado como mecanismo responsable de ello. Chandrasekhar (1942) probó que la escala de

tiempo requerida para que los encuentros estelares llevaran a una galaxia a tal estado de equilibrio es mayor que la edad del Universo. Además, el relajamiento debido a encuentros estelares predice el fenómeno de segregación de masa —estrellas masivas siendo más abundantes hacia las regiones centrales de una galaxia—, lo que observacionalmente lleva a notables gradientes de color no detectados en las galaxias. Es claro que un nuevo modelo físico se hace indispensable para resolver el misterio, en particular uno que actúe en escalas temporales cortas y que no lleve al fenómeno de segregación de masa.

Tal modelo físico fue descrito claramente por primera vez por Lynden-Bell (1967) con un nombre particularmente sólido y difícil de olvidar: relajamiento violento. De acuerdo a Lynden-Bell, el relajamiento violento puede llevar a una galaxia de un estado de desequilibrio virial a un estado casi estacionario a través de una serie de cambios rápidos en su potencial gravitacional, traducidos en una serie de contracciones y expansiones que serán más rápidas y más “violentas” cuanto más alejada del equilibrio se encuentre inicialmente la galaxia. El relajamiento violento puede reproducir el estado final del sistema muy aproximadamente descrito como el de una esfera isotérmica, pero con ausencia del fenómeno de segregación de masa (White 1996).

Dicho estado final es descrito como la distribución más probable, sujeta a las siguientes restricciones:

- a) Conservación de la masa total.
- b) Conservación de la energía total.
- c) Conservación del momento lineal total.
- d) Conservación del momento angular total.
- e) Conservación del valor de la función de distribución en cada celda de espacio fase; es decir, la ecuación de Boltzmann no colisional $Df/Dt = 0$ se cumple.

Estas características convierten a la distribución de Lynden-Bell formalmente en la cuarta distribución de la Mecánica Estadística, además de las tres bien conocidas de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein y Fermi-Dirac. El relajamiento violento induce una distribución de partículas de tipo gaussiano, donde existe equipartición de energía *por unidad de masa*, es decir, donde la segregación de masa no tiene lugar (Aguilar 2010); además, lleva al sistema a

un estado de casi equilibrio haciéndolo más compacto, aunque nunca llegue formalmente a un estado completo de equilibrio debido al amortiguamiento de Landau (“*Landau damping*”), que tiene lugar precisamente durante la etapa de colapso en la que el potencial cambia con el tiempo, período durante el cual el relajamiento violento se manifiesta. Por otro lado, se verifica también que aunque este proceso no altera la energía total del sistema (inciso b arriba), sí cambia las energías individuales de sus partículas constituyentes con independencia de su masa (van den Bosch 2005; Binney y Tremaine 2008).

El relajamiento violento es hoy por hoy el mejor modelo para entender el estado presente de virialización de grandes sistemas estelares como las galaxias. Como veremos en el Capítulo 3, este proceso justifica la evolución de nuestros modelos a un estado estacionario después de la etapa de colapso gravitatorio, resultado de las condiciones iniciales de fuerte desequilibrio virial.

1.5.3 Integrales de movimiento

Las estrellas en una galaxia se mueven en respuesta al potencial gravitacional global de esta, según discutimos en la Sección 1.5.1. Cuando este potencial presenta algún tipo de simetría, es decir, cuando su forma funcional no cambia bajo una transformación espacial o temporal, entonces siempre existe una cantidad física que se conserva al moverse las estrellas a lo largo de sus órbitas. Tres de estos ejemplos de simetrías son:

- a) **la conservación de la energía**, cuando el potencial es invariante ante una traslación temporal; esto es, cuando $\Phi(t) = \Phi(t + t_0)$.
- b) **la conservación de momento lineal**, cuando el potencial es invariante ante una traslación espacial; es decir, cuando $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$.
- c) **la conservación de momento angular**, cuando el potencial es invariante con respecto a la rotación a lo largo de un determinado eje; o sea $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}})$.

El que determinadas cantidades físicas permanezcan inalteradas conforme el movimiento orbital tiene lugar se vuelve una propiedad muy importante, pues nos lleva directamente al

concepto de integrales de movimiento. Al hablar de la ecuación de Boltzmann, ya habíamos definido el concepto de espacio fase en el contexto estelar. Efectivamente, el espacio de 6 dimensiones generado por las tres componentes de posición y las tres componentes de velocidad es el escenario natural para describir órbitas, por lo que las cantidades conservadas a lo largo de ellas deben ser función de las coordenadas de tal espacio. Si llamamos I a una de tales cantidades conservadas, entonces $I_o = I(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, donde I_o es el valor particular de dicha cantidad a lo largo de una órbita dada. Además de representar una restricción que la órbita debe respetar, esta relación disminuye en una dimensión la región del espacio fase donde se mueve la órbita, hecho que se justifica porque la ecuación anterior puede reescribirse de tal manera que una de las coordenadas de espacio fase sea función del resto de las coordenadas, dejando así de ser independiente.

En general podemos decir que si un potencial gravitacional tiene M simetrías, entonces las órbitas de las estrellas bajo su influencia conservarán M cantidades físicas, y por lo tanto se moverán en una región del espacio fase con dimensión $(2N - M)$, siendo N el número de grados de libertad del problema. Las cantidades conservadas presentan una ventaja práctica: por cada una de ellas es posible realizar una integración de las ecuaciones de movimiento. Así, cada una de ellas es una *integral de movimiento*.

1.5.4 Órbitas en galaxias elípticas

El tipo de órbitas que siguen las estrellas en las galaxias depende en buena medida de la forma de la galaxia huésped, pero principalmente de esas cantidades conservadas llamadas integrales de movimiento, las cuales definen la subregión del espacio fase accesible a tales órbitas, así como su forma y propiedades en el espacio físico real de tres dimensiones.

Las galaxias elípticas albergan muy distintos tipos de órbitas, las que podemos clasificar según la geometría de la galaxia huésped. Desde las primeras observaciones de Hubble (1922) mencionadas en la introducción a este trabajo, ya era claro que las imágenes proyectadas de galaxias elípticas presentaban distintos grados de elipticidad. Así, encontramos dos tipos básicos de órbitas en ellas:

- a) **Órbitas en potenciales triaxiales**, cuando no existe simetría respecto a ningún eje y las proyecciones de la galaxia a los tres planos principales son tres elipses distintas.
- b) **Órbitas en potenciales con simetría axial**, el caso cuando la galaxia presenta simetría respecto a un eje en particular. Dos de las proyecciones de la galaxia a los planos principales serán en este caso elipses iguales, y una será un círculo o una elipse con excentricidad $e \sim 0$.

Elipsoides triaxiales. Un elipsoide triaxial, o simplemente elipsoide, es una superficie cuadrática caracterizada por tres semiejes, a = semieje mayor, b = semieje intermedio y c = semieje menor (Fig. 1.5). Observaciones y simulaciones numéricas de galaxias elípticas indican que esta es la forma adoptada por dichos sistemas una vez en equilibrio virial, como indicamos a continuación.

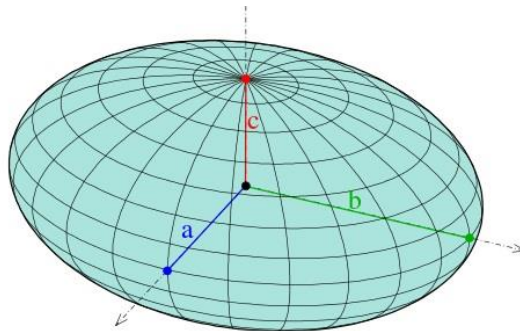


Fig. 1.5. Un elipsoide triaxial con semiejes a , b , c .

El estudio de los modelos triaxiales de galaxias elípticas tuvo su motivación original en el descubrimiento de que estas muestran muy poca rotación (Bertola y Capaccioli 1975) y por lo tanto carencia de simetría rotacional respecto a un eje preferencial. Pero en ausencia de rotación, las formas elipsoidales observadas de estas galaxias tendrían que justificarse de alguna otra manera. Binney (1978) sugirió que estas elongaciones podrían entenderse introduciendo anisotropías al movimiento de las estrellas, hecho que pudo confirmarse con la construcción de los primeros modelos triaxiales autoconsistentes de galaxias por superposición de órbitas (Schwarzschild 1979), donde las elongaciones reproducidas en sus formas podrían ser explicadas con la existencia de dos integrales aislantes de movimiento adicionales —no clásicas—. Las formas triaxiales intrínsecas de las galaxias pudieron confirmarse

posteriormente por medio de simulaciones de N -cuerpos (Wilkinson y James 1982; van Albada 1982). Este análisis tenía lugar basado en una segunda propiedad de las galaxias elípticas, esto es, que los centros de muchas de ellas muestran un perfil de brillo muy plano, prácticamente constante (“*core*”), mientras que otras poseen un perfil central más pronunciado, también llamado cuspidal (“*cuspy*”). Ambos perfiles se muestran en la Figura 1.6.

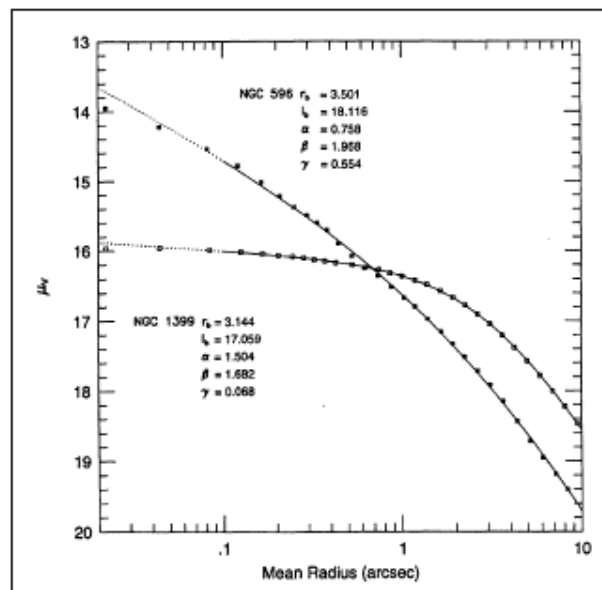


Fig. 1.6. Los núcleos de dos galaxias elípticas mostrando un perfil plano tipo “core” (NGC 1399) y otro cuspidal (NGC 595). Tomado de Jiménez Vicente (2015).

Las órbitas encontradas en potenciales triaxiales caracterizados por núcleos con perfil de luminosidad plano son en general órbitas regulares o casi periódicas (Binney y Spergel 1982), clasificadas en cuatro subtipos principales (de Zeeuw 1985; Statler 1987):

- 1) Órbitas tipo caja (“*box*”).
- 2) Órbitas de tubo de eje menor (“*short-axis tubes*” o SAT)
- 3) Órbitas de tubo de eje mayor internas (“*inner long-axis tubes*” o ILAT).
- 4) Órbitas de tubo de eje mayor externas (“*outer long-axis tubes*” o OLAT).

Las *órbitas de caja* se caracterizan por mostrar oscilaciones en los tres ejes coordenados x , y , z en su recorrido, además de llenar una región en el espacio tridimensional semejante a una caja (de ahí su nombre). Asimismo, pueden pasar arbitrariamente cerca del centro de la galaxia huésped (Figura 1.7). Como las 8 esquinas de una órbita de caja son tangentes a la superficie equipotencial correspondiente a su energía, una estrella con esta órbita se detiene instantáneamente en tales puntos de tangencia (Binney y Tremaine 2008).

Las *órbitas de tubo* (SAT, ILAT y OLAT), por otro lado, representan la subclase más importante de órbitas resonantes, con una relación 1:1 entre frecuencias en dos coordenadas (Vasiliev 2013). Estas giran alrededor de los ejes principales (eje menor para las SAT y eje mayor para ILAT y OLAT) cubriendo una región en el espacio tridimensional cuya forma recuerda la de un tubo grueso, que como todo tubo tiene una oquedad o “túnel” central (Figura 1.7). Por lo tanto, a diferencia de las órbitas de caja, las estrellas en órbitas de tubo no pasan por el centro de sus galaxias huéspedes, pues en general las órbitas resonantes estables evitan el centro del potencial (Merritt y Valluri 1999); además, nunca se detienen y tienen un sentido de giro único. Los tubos de eje menor (SAT) resultan de la resonancia 1:1 entre las frecuencias de oscilación de la órbita en los ejes x y y , fuera de las regiones centrales, mientras que las ILAT y OLAT surgen de la resonancia 1:1 entre las frecuencias de oscilación en los ejes y y z a radios aún mayores (van den Bosch 2005).

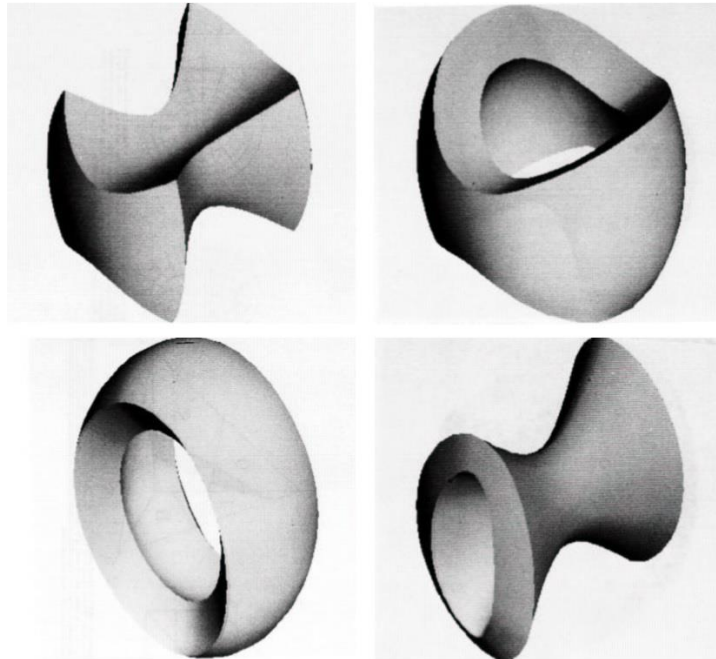


Fig. 1.7. Los cuatro tipos de órbitas en un potencial triaxial. De la esquina superior izquierda en el sentido de las manecillas del reloj: órbita de caja, órbita de tubo de eje menor, órbita de tubo de eje mayor interna y órbita de tubo de eje mayor externa. Tomada de Statler (1987).

Por otro lado, existen galaxias elípticas que pueden ser mejor entendidas como esferoides con simetría axial, es decir, aquellos que poseen un eje de simetría rotacional. Los potenciales con simetría axial vienen en dos variedades, *oblatos* y *prolatos*.

Esferoides con simetría axial oblatos. Un esferoide oblato, o aplanado, es la superficie generada al hacer girar una elipse alrededor de su eje menor, donde se cumple que $a = b > c$. Su forma recuerda la de una lenteja o un chocolate *m&m* (Figura 1.8).

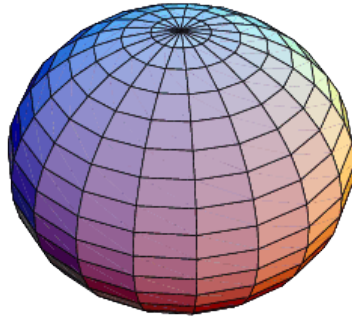


Fig. 1.8. Esferoide oblato, donde se cumple $a = b > c$ y el eje de rotación es el eje menor.

Esferoides con simetría axial prolato. Un esferoide prolato, o alargado, es la superficie resultado de girar una elipse alrededor de su eje mayor, donde se cumple que $a > b = c$ (Figura 1.9). Su forma se asemeja a un balón de rugby o de futbol americano, o a una sandía.

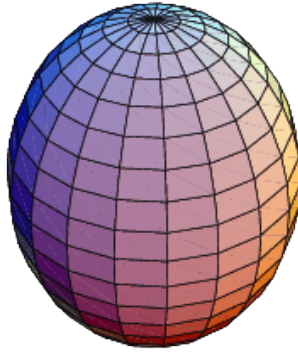


Fig. 1.9. Esferoide prolato, donde se cumple $a > b = c$ y el eje de rotación es el eje mayor.

Suponiendo de nuevo una configuración en estado estacionario, existe una simetría temporal y por ende la energía total representa una primera integral aislante de movimiento (I_1) en estos sistemas. Ahora, dado que tanto los potenciales oblatos como los prolato tienen un eje de rotación, este representa una segunda simetría que da origen a una nueva integral de movimiento aislante adicional a la energía. Esta nueva cantidad conservada es el momento angular respecto al eje de rotación dado (I_2 o L_z como comúnmente se le denota).

Al respetar al menos dos integrales aislantes de movimiento, las órbitas de las estrellas en potenciales oblatos y prolatos estarán confinadas en el espacio fase a una región cuya dimensión es como máximo $2N - M$, es decir $(2 \times 3) - 2 = 4$. En el espacio físico tridimensional, las órbitas en galaxias elípticas descritas por potenciales oblatos y prolatos presentan formas similares a aquellas en potenciales triaxiales, incluyendo en primer lugar las órbitas de caja, pero siendo

- 1) las órbitas de tubo de eje menor el tipo predominante en potenciales oblatos y
- 2) las órbitas de tubo de eje mayor internas y externas las que dominan en potenciales prolatos.

Núcleos cuspidales. El descubrimiento de que las galaxias elípticas carecen de núcleos isotérmicos de densidad constante (Stiavelli et ál. 1993; Crane et ál. 1993), y que el brillo de estos aumenta notablemente conforme $r \rightarrow 0$ y puede ser descrito como una ley de potencia, introdujo en astronomía el concepto de galaxias con núcleos cuspidales, en contraste con los núcleos de perfil plano de otras. Esta dicotomía nuclear (nucleada vs. cuspidal) vino acompañada también de algunas diferencias en lo referente a la estructura orbital presente en estos sistemas.

Por ejemplo, se ha encontrado que un tipo particular e importante de órbitas llamadas “cajuelas” (“*boxlets*”), caracterizadas por resonancias entre sus tres grados de libertad, son comunes y reemplazan a las órbitas de caja cuando el potencial es de naturaleza cuspidal. Tales órbitas fueron identificadas en el potencial triaxial logarítmico (Miralda-Escudé y Schwarzschild 1989). Igualmente, los potenciales triaxiales en general, y en particular aquellos con núcleos cuspidales, han mostrado dar origen a órbitas caóticas (Kandrup y Siopis 2003), pues es ya bien conocido el hecho de que una gran concentración de masa al centro de una galaxia, como lo es la presencia de un agujero negro, es capaz de dispersar las órbitas de caja y volverlas caóticas (Gerhard y Binney 1985; Merritt y Valluri 1996). Las órbitas caóticas pueden conservar hasta dos integrales aislantes, y son libres de llenar uniformemente la superficie equipotencial correspondiente. Estas categorías de órbitas, cajuelas y caóticas, se ilustran en la Figura 1.10.

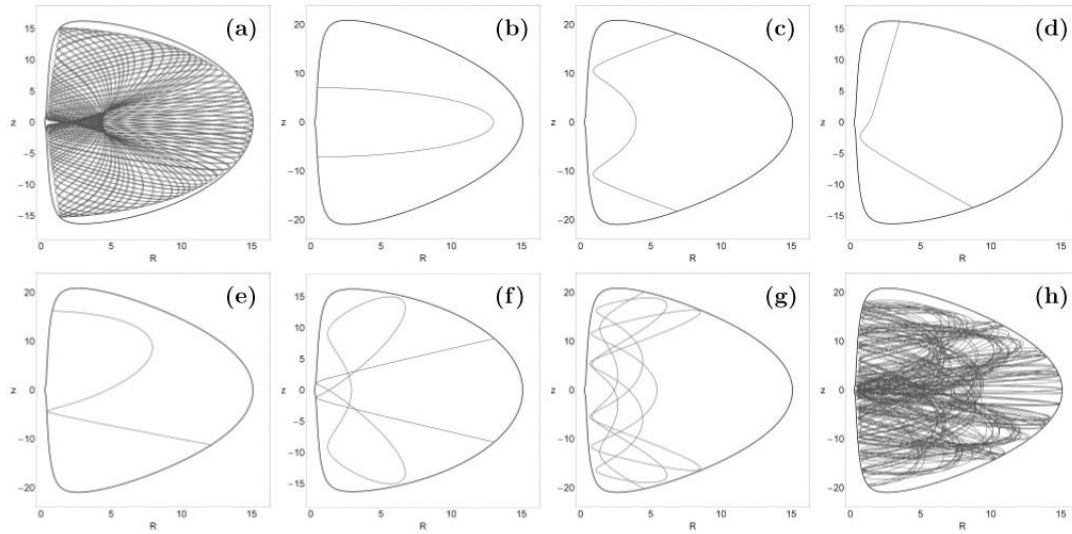


Fig. 1.10. Algunas variantes de órbitas presentes en potenciales cuspidales, en su proyección al plano meridional (R, z) en el caso axisimétrico: a) es una órbita de caja; e), f) y g) son cajuelas (“boxlets”) con resonancias 3:1, 6:1 y 10:1, respectivamente; h) es una órbita caótica. Tomado de Zotos, Caranicolos y Doni (2015).

1.5.5 Formas de galaxias elípticas y la inestabilidad de órbita radial (ROI)

Las galaxias elípticas son sistemas esferoidales que presentan distintos grados de elipticidad proyectada, como ya se ha discutido en las Secciones 1.1 y 1.2. Hubble (1926) realizó una estimación de las formas intrínsecas esperadas de estos sistemas bajo la hipótesis de que las elípticas eran esencialmente esferoides oblatos con orientaciones al azar. Binney (1976, 1978) concluiría que el aplastamiento observado de las elípticas —no justificable por rotación— es debido a anisotropías en las dispersiones de velocidades de sus estrellas y que aquellas podrían entenderse mejor (en oposición a Hubble) como esferoides intrínsecamente *prolatos*. Sin embargo, el autor hacía notar que las formas auténticamente triaxiales no serían menos probables que aquellas con simetría axial. Schwarzschild (1979, 1982) confirmaría esta última suposición construyendo modelos autoconsistentes de galaxias triaxiales por el método de superposición de órbitas.

La inestabilidad de órbita radial (*radial orbit instability*, ROI) es un mecanismo dinámico que ocurre en sistemas autogravitantes de partículas caracterizados por una fuerte anisotropía entre sus velocidades radiales y tangenciales; es decir, configuraciones esféricas que contienen un buen número de partículas

con órbitas muy radiales que pueden pasar arbitrariamente cerca del centro del sistema. Este mecanismo es invocado comúnmente para justificar las formas elongadas de las galaxias elípticas (Maréchal y Perez 2010) y tiene su origen en la transformación de las órbitas tipo “bucle” (*loop*) en órbitas de caja en condiciones de bajo momento angular ante una pequeña perturbación, donde una barra se forma y una dinámica caótica local domina (Merritt 1987; Cincotta et ál. 1996). Los primeros trabajos teóricos y simulaciones numéricas sobre la ROI aparecen en los años 70 (Antonov 1973; Hénon 1973), y ya a principios de los 80 existían ideas más concretas sobre la estabilidad de sistemas con presencia de ROI, como el propuesto criterio de estabilidad de Polyachenko y Shukhman (1981) basado en el cociente de las componentes radial/tangencial de la energía cinética total del sistema.

Es el trabajo de van Albada (1982) el que abre un nuevo y amplio capítulo en el estudio de la ROI. Los resultados de este autor indican que mientras el colapso gravitatorio de esferas homogéneas de partículas no se ve afectado por la ROI, esta empieza a cobrar importancia si se introducen pequeñas inhomogeneidades, particularmente si el colapso es cada vez más violento e inducido por un cociente virial cada vez más pequeño ($2T/|W| < 1$). En estas condiciones, la distribución esférica original se deforma convirtiéndose en general en un elipsoide triaxial —debido a la ROI—, el cual reproduce además el perfil de de Vaucouleurs ($R^{1/4}$) característico de las galaxias elípticas. Van Albada considera cocientes viriales mayores que 0.1.

Merritt y Aguilar (1985) y subsecuentemente Aguilar y Merritt (1990) exploran en detalle el papel de la ROI en simulaciones numéricas con perfiles de dispersión de velocidades tipo Osipkov-Merritt (isotrópicos hacia el centro y anisotrópicos a radios grandes), logrando obtener configuraciones finales triaxiales y prolatas, donde además, si el colapso gravitacional tiene lugar con cocientes viriales suficientemente fríos ($2T/|W| < 0.1$), una inestabilidad de barra central se hace presente. Las configuraciones originales no tienen que ser inhomogéneas para producir esferoides con formas y perfiles de densidad realistas, siempre y cuando el colapso involucre cocientes viriales suficientemente fríos.

La ROI es un fenómeno que fundamentalmente se presenta en configuraciones esféricas de partículas, sin embargo, se ha reportado la ocurrencia de ROI (p.ej. Antonini et ál. 2008) en sistemas triaxiales cuspidales, los cuales pueden adquirir una forma más prolata debido a la abundancia de órbitas de caja con movimientos predominantemente radiales.

Como veremos en el Capítulo 3, la ROI justifica las formas finales y propiedades de los esferoides resultantes de las simulaciones de este trabajo de investigación.

Capítulo 2 Simulaciones de N -cuerpos

2.1 Conceptos básicos y antecedentes históricos

Las galaxias son enormes conglomerados de estrellas unidos por la gravedad. Por lo tanto, sería posible en principio conocer cuáles son las propiedades globales identificables en la galaxia como un todo (su forma, dinámica interna, estabilidad, etc.) una vez que, tomadas por pares, sumáramos cada una de la interacciones gravitacionales entre todas sus estrellas constituyentes.

En física, de hecho, muchos sistemas complejos pueden modelarse como grandes agregados de unidades relativamente simples con interacciones relativamente simples entre ellas (Heggie y Hut 2003). El problema de N -cuerpos es uno de los problemas clásicos de la Mecánica Celeste, y tiene una importancia extraordinaria al aplicarse al entendimiento de las galaxias elípticas, porque fundamentalmente tratamos de describir la evolución dinámica de un sistema (la galaxia) representable por elementos discretos (sus estrellas) los cuales están sujetos a una ley de interacción, en este caso la gravedad (Aguilar 1992).

Al estudiar la interacción gravitacional entre masas, el formalismo newtoniano permite soluciones analíticas exactas para las trayectorias de no más de dos cuerpos ($N = 2$) atraídos mutuamente por la gravedad. Si $N = 3$ o mayor, el problema se vuelve matemáticamente intratable. Para el caso de tres cuerpos, pueden obtenerse soluciones analíticas sólo si se introducen ciertas restricciones particulares, las soluciones al llamado *problema de tres cuerpos restringido*. Quizás el mejor ejemplo de estas soluciones son las descubiertas por Joseph Louis Lagrange en 1772, correspondientes a los llamados puntos de estabilidad de Lagrange de un sistema de tres cuerpos con masas m_1 , m_2 y m_3 , una vez que se introducen dos restricciones elementales: a) $m_1, m_2 \gg m_3$, es decir la tercera masa es insignificante comparada con las primeras dos y b) m_3 es coplanar a las órbitas de m_1 y m_2 (Gonsalves 2011).

Es de esperar que si queremos entender el comportamiento dinámico de sistemas constituidos por cientos de miles o cientos de miles de millones de partículas como los cúmulos estelares o

las galaxias, algo distinto tendremos que hacer además de introducir restricciones que simplifiquen de alguna forma nuestro problema.

El problema de N -cuerpos ha sido atacado de distintas formas a lo largo de la historia. Después de Newton y su solución al problema específico de dos cuerpos donde la solución general son trayectorias cónicas, una línea de trabajo buscó obtener soluciones aproximadas a la solución del problema de N -cuerpos, por ejemplo, a través de técnicas perturbativas. Esto llevó a la Mecánica Celeste y a exitosas predicciones teóricas —luego confirmadas— como la existencia de Neptuno en 1846 por medio de las anomalías observadas en la órbita de Urano. Otra alternativa fue la búsqueda de soluciones por medio de la transformación del problema original en uno equivalente, hecho posible a través de la Mecánica Analítica. Hoy sin embargo, siguiendo una nueva aproximación al problema surgida hace aproximadamente un siglo, aplicamos las técnicas propias de la ahora llamada dinámica estelar (Aguilar 2006), que además de tratamientos analíticos hace uso de simulaciones de N -cuerpos para rastrear la dinámica interna de sistemas estelares.

Una simulación de N -cuerpos es una solución numérica a las ecuaciones de movimiento de N partículas que interactúan gravitacionalmente entre sí (Trenti y Hut 2008). A mediados del siglo XX, sin una computadora y tratando de estudiar encuentros cercanos entre galaxias, la simulación llevada a cabo por Holmberg (1941) es considerada la primera simulación numérica del problema de N -cuerpos en un contexto astronómico. Haciendo uso de un original método donde la fuerza de gravedad y su amortiguamiento con el cuadrado inverso de la distancia es sustituida por intensidad luminosa, que guarda la misma dependencia con el cuadrado inverso de la distancia, Holmberg utilizó 36 focos sobre una mesa para representar a cada una de las dos galaxias de su simulación. Medía la intensidad luminosa sobre cada “partícula” (foco) del sistema con celdas fotoeléctricas, que equivalía a medir la fuerza gravitatoria sobre ella, para luego efectuar el desplazamiento del foco correspondiente a tal fuerza. Con esta curiosa pero válida estrategia, Holmberg pudo confirmar la gran inelasticidad de los encuentros entre galaxias (Aguilar 1992).

No obstante, es el trabajo de von Hoerner (1960) el que viene a dejar el primer precedente como investigación pionera, con el uso de computadoras, en el campo de las simulaciones

numéricas del problema clásico de N -cuerpos en astronomía en el sentido actual. Con recursos computacionales muy limitados, von Hoerner investigó por vez primera la evolución de un cúmulo estelar con un número máximo de 16 partículas. A pesar de lo primitivo de los recursos y la simplificación de ese primer ejercicio, ya fenómenos como la formación de binarias en cúmulos resultaban evidentes (Aarseth 2003).

Finalmente, es en la década de los 80 cuando se da un auténtico florecimiento en el campo de las simulaciones de N -cuerpos con la implementación de algoritmos eficientes y rápidos para modelar sistemas no colisionales, tales como los códigos de malla (Hockney y Eastwood 1988) y los códigos de árbol (Barnes y Hut 1986). Simultáneamente, técnicas de regularización fueron desarrolladas para tratar el problema de encuentros cercanos entre partículas y la dinámica de binarias para el caso de simulaciones directas de sistemas colisionales, siendo el trabajo de Aarseth y su serie de códigos NBODY-X la mejor referencia (Aarseth 2003).

2.2 Planteamiento. Regímenes colisional y no colisional

Resolver el problema de N -cuerpos es equivalente a obtener las soluciones a las ecuaciones clásicas de movimiento de N partículas sujetas a la relación 1.5 en el Capítulo 1. Este planteamiento, fundamentado en la más pura mecánica newtoniana, es hoy clave en el estudio de la dinámica interna de sistemas estelares y galaxias, una vez que dichas ecuaciones son incorporadas dentro de un código de N -cuerpos para ser resueltas numéricamente.

Es importante señalar que las soluciones generadas por métodos numéricos son generalmente sólo aproximaciones a las soluciones exactas de las ecuaciones en cuestión. No obstante, son muchos más los complejos sistemas de ecuaciones que pueden ser resueltos numéricamente que aquellos que lo son de forma analítica o exacta, y es común que tales soluciones aproximadas proporcionen un mejor entendimiento del problema considerado (Stone 2007).

Por otro lado, cabe mencionar que a diferencia de otros campos de la física como la termodinámica y la mecánica estadística, donde históricamente primero se entendieron las propiedades globales de los gases en términos de variables macroscópicas como presión y temperatura, para después describir la física local del sistema a través de la interacción

elemental entre sus moléculas, en el caso de la gravedad la expresión analítica básica que describe la interacción gravitacional entre cuerpos fue conocida desde un principio por Newton en el siglo XVII (Aguilar 1992). Es a partir de tal interacción local que es posible explicar e incluso predecir las propiedades globales de complejos sistemas estelares dentro de los cuales cada interacción entre pares de partículas es cuantificable.

Siendo la gravedad la fuerza dominante a escalas cósmicas, resulta afortunado que a partir de la relativa simplicidad de la formulación newtoniana sea posible realizar simulaciones detalladas de una gran cantidad de objetos y estructuras unidas por la gravedad en el Universo, desde sistemas planetarios hasta cúmulos de galaxias. Además, con excepción de aquellas situaciones donde estrellas degeneradas como las enanas blancas o estrellas de neutrones juegan un papel importante, en general las bajas velocidades y masas de estrellas en cúmulos estelares no hacen necesario el uso de la Relatividad (Heggie y Hut 2003). Incluso los movimientos de estrellas alrededor del probable agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia (Ghez et ál. 2000) pueden ser modelados a través de una aproximación newtoniana clásica.

Idealmente, al tratar de resolver el problema de N -cuerpos numéricamente, buscaríamos realizar una simulación (diríamos “lo más realista posible”) que incluyera exactamente el mismo número de partículas que tiene el sistema estelar que queremos modelar. Aunque actualmente las simulaciones numéricas con tantas partículas como estrellas en un cúmulo globular son perfectamente realizables, las mejores computadoras no pueden funcionar eficientemente si el número de partículas excede $\sim 10^{10}$, que sería el número típico de estrellas en una galaxia. Ante esto tenemos dos alternativas, las cuales dicho sea de paso dan pie a toda una serie de problemas y metodologías distintas (Binney y Tremaine 2008):

- 1) **Colisional.** Modelar el sistema que contiene N_* partículas bajo un criterio colisional significa que el código utilizado integrará numéricamente las ecuaciones de movimiento de exactamente $N = N_*$ partículas. El término “colisión” es un tanto engañoso en este contexto, pues en realidad se utiliza sólo para describir encuentros cercanos entre estrellas, no precisamente choques directos (colisiones) entre ellas. En un sistema colisional, el tiempo de relajación es típicamente menor que la duración de

la integración numérica. El código utilizado deberá dar cuenta precisa de encuentros cercanos entre partículas y la formación de estrellas binarias y triples dentro del sistema. Ejemplo de dinámica estelar colisional: los movimientos de estrellas de un cúmulo globular.

- 2) **No colisional.** Modelar el sistema usando la aproximación no colisional implica que el código empleado integrará las ecuaciones de movimiento de $N \ll N_*$ partículas. En un sistema no colisional los encuentros cercanos entre estrellas no existen o son despreciables; además, normalmente su tiempo de relajación real es mucho mayor que la duración de la integración numérica. Aunque el número de partículas adoptado en la simulación es siempre menor que el número de ellas en un sistema estelar real, la aproximación al problema se considera válida y precisa porque la integración se realiza en un tiempo mucho más corto que el tiempo de relajación típico ya sea del sistema estelar real o del modelo adoptado para representarlo.

Ejemplo de dinámica estelar no colisional: los movimientos de estrellas de una galaxia.

2.3 Tiempo colisional y tiempo dinámico

Una manera efectiva de cuantificar la colisionalidad de un sistema estelar es analizando los cambios en la fuerza de gravedad como resultado de la influencia de partículas cercanas y lejanas. Empecemos estableciendo un sistema discreto de partículas dentro del cual tomaremos como referencia una de ellas, nuestra partícula de prueba (Figura 2.1).

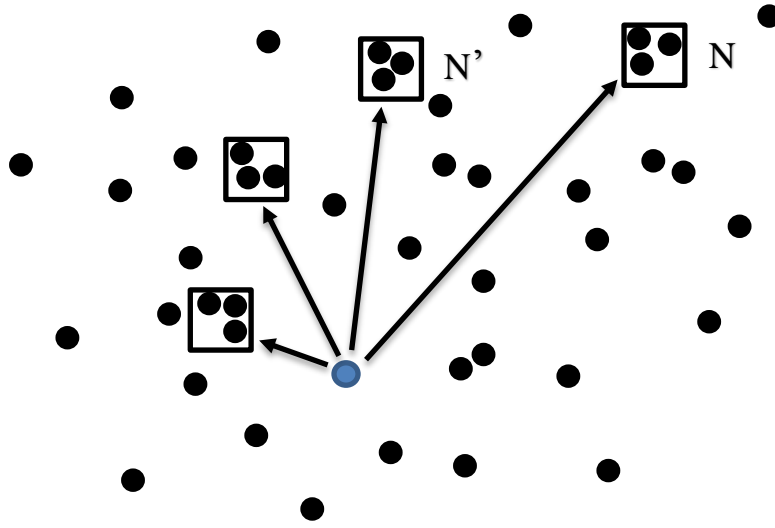


Fig. 2.1. La interacción gravitacional de una partícula de prueba (al centro) con otras partículas contenidas en regiones particulares a distintas distancias dentro de un sistema.

La partícula de prueba interactúa gravitacionalmente con el resto de las partículas en el sistema. Si ahora consideramos una región particular del mismo que contenga N partículas a una distancia r , entonces la fuerza de gravedad de tal región sobre la partícula de prueba será

$$F \propto \frac{N}{r^2}, \quad (2.1)$$

y considerando la naturaleza discreta del sistema, habrá fluctuaciones en dicha fuerza de la forma

$$\delta F \propto \frac{\delta N}{r^2} = \frac{\sqrt{N}}{r^2}. \quad (2.2)$$

Si ahora tomamos otra región del sistema a una distancia r' e imponemos la condición de que la fuerza de gravedad de tal región sobre la partícula de prueba sea en promedio la misma que en el caso anterior, entonces el número de partículas en la nueva región será

$$N' \propto r'^2, \quad (2.3)$$

donde ahora las fluctuaciones en la fuerza serán

$$\delta F' \propto \frac{\sqrt{N'}}{r'^2} \propto \frac{1}{r'} . \quad (2.4)$$

De aquí concluimos que, en general, si un sistema es subdividido en regiones tales que cada una de ellas ejerza en promedio la misma fuerza gravitatoria sobre la partícula de prueba, las fluctuaciones en sus respectivas fuerzas se reducirán en función de la distancia como

$$\Delta F \propto \frac{1}{r} . \quad (2.5)$$

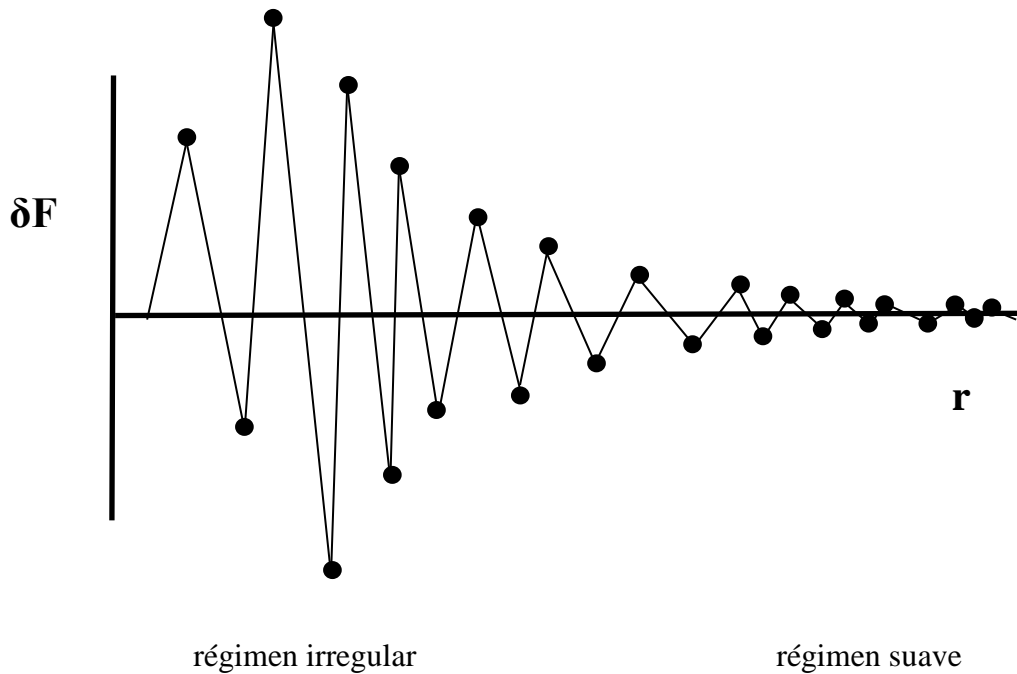


Fig. 2.2. Fluctuaciones de la fuerza de gravedad como función de la distancia.

La dependencia de estas fluctuaciones en la fuerza con el recíproco de la distancia se ilustra en la Figura 2.2, donde identificamos dos regímenes bien diferenciados (Aguilar 2006). Es claro que a distancias cortas las fluctuaciones son grandes, siendo estas producidas por partículas cercanas, en el llamado régimen irregular. Por su parte, a distancias grandes estas fluctuaciones se atenúan notablemente, en lo que identificamos como régimen suave, resultado de la influencia gravitacional de las partículas más lejanas en el sistema.

Con estos dos comportamientos bien identificados en la magnitud de las fluctuaciones asociadas a la fuerza de gravedad, disponemos ya de una base cualitativa para definir cuantitativamente dos parámetros fundamentales en el estudio de la dinámica estelar, el tiempo colisional y el tiempo dinámico. Recordemos aquí que en el Capítulo 1, Sección 1.5.1, nos referimos por primera vez al tiempo dinámico como el intervalo temporal asociado precisamente con el flujo de partículas en el lado izquierdo de la ecuación de Boltzmann, mientras que el tiempo colisional era la escala temporal natural del lado derecho de la misma ecuación, donde las colisiones hacían entrar y salir partículas de la región infinitesimal de espacio fase considerada. Definamos ahora ambos tiempos en el contexto de los regímenes irregular y suave en las fluctuaciones de la fuerza de gravedad sobre una partícula de prueba.

El *tiempo colisional* es el tiempo característico en el cual la parte colisional (régimen irregular) domina la dinámica local del sistema (Aguilar 2006), y queda definido como

$$t_{\text{col}} \propto \left(\frac{R}{\langle v^2 \rangle} \right) N / \ln(N). \quad (2.6)$$

El *tiempo dinámico* es el tiempo que le tomaría a una partícula el recorrer el sistema, es decir, viajar de la periferia del mismo a su centro en caída libre. Es la unidad natural de tiempo en sistemas unidos por la gravedad en el régimen suave, dada por

$$t_{\text{din}} \propto \left(\frac{R}{\langle v^2 \rangle} \right). \quad (2.7)$$

Al obtener el cociente de ambas cantidades estaremos por tanto estimando la importancia que tiene la parte irregular (debida a partículas cercanas) con respecto a la suave (partículas lejanas):

$$\frac{t_{\text{col}}}{t_{\text{din}}} \propto \frac{N}{\ln(N)}. \quad (2.8)$$

El cociente $N/\ln(N)$ es muy importante para caracterizar rápidamente la naturaleza del sistema en función de las interacciones de sus estrellas constituyentes.

Cuanto más pequeño sea este cociente, más estará dominado el sistema por encuentros cercanos entre sus estrellas y será por ende más colisional. Si por el contrario el cociente es grande, los encuentros cercanos entre estrellas serán muy raros. Este será un escenario no colisional.

Podemos confirmar entonces que es esencialmente el número de partículas (N) el que determina si un sistema está o no dominado por colisiones. Cuanto más grande sea este número, menos colisional será el sistema, como ya habíamos adelantado en nuestra discusión de la ecuación de Boltzmann (Sección 1.5.1). Las simulaciones de N -cuerpos desarrolladas en este trabajo requieren un escenario lo menos colisional posible para garantizar una confiable clasificación orbital. Como veremos en el siguiente capítulo, un millón de partículas nos permitió establecer el balance entre un N razonablemente alto y tiempos de integración relativamente cortos. La siguiente tabla comparativa reproducida de Aguilar (2006) ejemplifica sistemas colisionales y no colisionales reales en astronomía en función del número de sus estrellas (N).

Sistema	N	$t_{\text{col}} [10^6 \text{ años}]$	$t_{\text{din}} [10^6 \text{ años}]$	$t_{\text{col}} / t_{\text{din}}$
Cúmulo abierto	$\leq \sim 10$	≤ 1	≤ 1	~ 1
Cúmulo globular	$\sim 10^6$	$\leq 10^3$	~ 10	$\sim 10^2$
Galaxia	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^7$	10^2	$\sim 10^5$
Cúmulo de galaxias	$10^2 - 10^3$	$\sim 10^3$	10^3	~ 1

Tabla 2.1. Sistemas colisionales y no colisionales en astronomía.

Es claro de la Tabla 2.1 que el cociente entre el tiempo colisional y el tiempo dinámico alcanza su máximo valor en el caso de las galaxias, de hecho los únicos sistemas estelares verdaderamente no colisionales. Los centros galácticos, dada la alta densidad estelar presente en ellos, abren la posibilidad real para encuentros cercanos entre estrellas y aun choques directos entre ellas. Lo mismo sucede en cúmulos globulares, los cuales no obedecen una

dinámica no colisional, además de presentar fenómenos como la segregación de masa y la formación de binarias (Binney y Merrifield 1998).

Así, una vez que queda establecida la naturaleza colisional o no colisional del sistema por ser modelado, se adopta el código de N -cuerpos correspondiente, ya sea integrando las ecuaciones de movimiento de todas sus partículas (régimen colisional), o sólo de un subconjunto de ellas (régimen no colisional).

2.4 Códigos de N -cuerpos

Al usar un código de N -cuerpos y obtener numéricamente por medio de una computadora las trayectorias de las partículas de un sistema unido por su propia gravedad, son dos las tareas esperadas de tal código (Stone 2007):

- 1) Que calcule las fuerzas que el resto del sistema ejerce sobre cada una de las partículas del mismo.
- 2) Que integre las ecuaciones de movimiento de cada una de esas partículas.

El principio es el mismo independientemente del código utilizado: a partir de las posiciones iniciales de las partículas, se calcula la fuerza gravitacional del resto del sistema sobre ellas. Luego, se usa esta fuerza para avanzar la partícula tanto en posición como en velocidad por un intervalo corto de tiempo —integrando las ecuaciones de movimiento—, para entonces volver a calcular la fuerza sobre ellas en esta nueva posición y con esta nueva velocidad, y así sucesivamente por el tiempo total de integración (Binney & Tremaine 2008).

La característica más importante que define cómo el código calculará las fuerzas es el grado de colisionalidad del sistema, y el objetivo es lograr que realice este cálculo de la manera más eficiente posible, principalmente dado el gran número de partículas.

Estimemos cómo aumenta el número de fuerzas por calcular en función del número de partículas interactuantes del sistema. La Tabla 2.2 muestra el número creciente de partículas y

el correspondiente número de fuerzas por calcular entre pares de ellas. De esta secuencia vemos que el número de interacciones gravitacionales a calcular, incluyendo todas las partículas (N) a un instante dado durante la simulación, crece como $N(N-1)/2$.



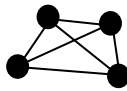
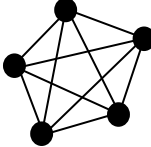
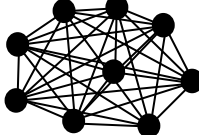
Número de partículas	Número de fuerzas entre pares de partículas
2 	1
3 	3
4 	6
5 	10
N 	$N(N-1)/2$

Tabla 2.2. Número de fuerzas por calcular entre pares como función del número de partículas de un sistema de N -cuerpos.

La rapidez con la que crece el número de fuerzas por calcular entre todos los pares de partículas constituyentes de un sistema, suponiendo que en principio todas son afectadas por todas, convierte en un auténtico reto cualquier intento de modelar por medio de un código de N -cuerpos la evolución del más simple cúmulo estelar, no se diga una galaxia entera.

Como ya habíamos descrito anteriormente, es el criterio de colisionalidad o no colisionalidad del sistema el que determinará qué aproximación seguir para el cálculo de fuerzas con el código

de N -cuerpos seleccionado. En el caso colisional, el llamado método de suma directa es el más utilizado y el más exacto; en el no colisional los tres caminos más comunes son los códigos de árbol y de expansión en funciones armónicas, así como los códigos de malla.

2.4.1 Método de suma directa

Este método es sin duda el más preciso para el cálculo de fuerzas, pues sencillamente no introduce ningún tipo de simplificación al problema y toma en cuenta, sumando, todas las posibles interacciones gravitacionales entre todas las partículas (N) del sistema, a costa consecuentemente de largos tiempos de cómputo invertidos (Trenti y Hut 2008). Puesto que a cada paso de tiempo el código tiene que calcular un mínimo de $N(N-1)/2$ fuerzas, se dice que este método es de orden $O(N^2)$.

Históricamente, el método de suma directa fue el primero en ser aplicado en simulaciones de N -cuerpos, las cuales estaban limitadas a pequeños valores de N , como fue el caso de los mencionados experimentos numéricos pioneros de von Hoerner (1960). Si $N \sim 10$, la suma directa es una opción viable porque $N^2 \sim 100$, es decir, 100 fuerzas por calcular por paso de tiempo. Hoy en día, sin embargo, ciertas simplificaciones permiten códigos de orden $O(N \ln N)$ o incluso $O(N)$. Si $N > 10,000$, como es común en simulaciones actuales, la suma directa sería por lo menos 1000 veces menos eficiente que tales códigos de orden simplificado. Ciertamente, la suma directa no es una opción factible si $N \gg 1$ (Binney y Tremaine 2008).

Los sistemas colisionales como los cúmulos globulares crean las condiciones físicas para los encuentros estelares cercanos y la formación de estrellas binarias, por ejemplo, donde es común que los astros se aproximen tanto que su parámetro de impacto es cero o casi cero, creando una singularidad en el código al calcular la fuerza de atracción entre ellos dada su dependencia con r^{-2} . Estas singularidades, comunes en semejantes encuentros cercanos, son tratadas en el método de suma directa a través de la técnica de *regularización*, que esencialmente hace una transformación a un sistema de coordenadas regularizadas donde el problema de dos cuerpos carece de dicha singularidad (Stiefel y Schiefele 1971; Mikkola 1997).

Los códigos de N -cuerpos de Aarseth (2003) son ampliamente utilizados para estudiar sistemas colisionales con la estrategia de suma directa, particularmente la dinámica de cúmulos estelares. Hasta hace muy poco tiempo, una corrida ordinaria en serie con uno de estos códigos no podía exceder 20, 000 partículas para mantener el tiempo total de cómputo restringido a unas 1000 horas, o sea casi un mes y medio de tiempo de CPU (Trenti y Hut 2008). Hoy la versión más avanzada de los códigos de Aarseth, NBODY6, ha sido extendida para su aplicación en supercomputadoras bajo el nombre de NBODY6++ con la cual, incorporando métodos de paralelización, se ataca el problema de sistemas colisionales con un millón de partículas (Wang et ál. 2015), el número típico de estrellas en un cúmulo globular real, acelerando sustancialmente su simulación.

Desde mediados de los años 90, el campo se vio beneficiado por una estrategia distinta, donde además de implementar técnicas de regularización, las simulaciones de N -cuerpos por suma directa empezaron a mejorar su eficiencia con el *hardware* utilizado. Las computadoras tipo GRAPE desarrolladas por Jun Makino (Figura 2.3) son máquinas rápidas especialmente diseñadas para realizar simulaciones numéricas de sistemas estelares, alcanzando desde sus orígenes (GRAPE-4) velocidades mínimas de 1 Tflo en 1995 (Makino y Taiji 1998). En estas máquinas, la arquitectura de circuitos integrados está diseñada para optimizar el cálculo de interacciones gravitacionales entre pares de partículas.

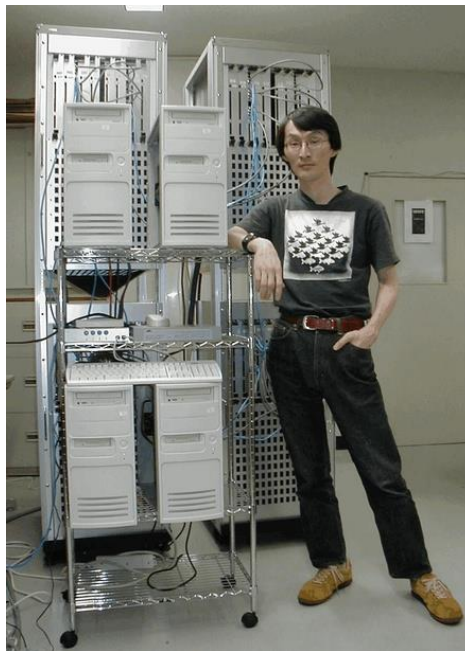


Fig. 2.3. Fotografía de J. Makino en la Universidad de Tokio en 2001 con el sistema GRAPE-6, capaz de velocidades de cálculo de 32 Tfloper en simulaciones de N -cuerpos por el método de suma directa.

2.4.2 Códigos de árbol

Un método robusto y común hoy en día en las simulaciones de N -cuerpos no colisionales es el utilizado en los llamados códigos de árbol, basados en el concepto original de Barnes y Hut (1986). Con estos códigos, el objetivo es realizar la simulación de tal manera que los encuentros cercanos no relajen al sistema, así como simplificar el problema del cálculo de interacciones gravitacionales entre partículas, para lo que se elimina el cálculo exacto de las fuerzas debidas a las partículas más lejanas, acelerando el proceso.

El algoritmo de árbol que sustenta estos códigos parte de un principio jerárquico, en analogía con la manera como los seres humanos adquirimos información, de tal forma que por ejemplo conocemos mejor a los individuos más cercanos a nosotros, como parientes y amigos, y menos a aquellos con los que tenemos poco trato. Así, los códigos de árbol dan más importancia, jerárquicamente, a las interacciones con partículas cercanas que a la influencia de las más alejadas en el sistema.

Existen básicamente dos tipos de códigos de árbol con aplicación directa a simulaciones de N -cuerpos: los árboles binarios y los árboles octales.

En los árboles binarios (Appel 1981; Jernigan 1985), el sistema de partículas a ser simulado se organiza por niveles, en el primero y más inferior de los cuales está la información de las partículas individuales. Luego, en el segundo nivel, las partículas son apareadas con sus vecinos más cercanos, además de que la información del total de N partículas es sustituida por la de los $N/2$ centros de masa calculados de dichos pares. Este proceso se repite conforme se asciende a través de los distintos niveles (Figura 2.4, izquierda), donde se va guardando la información de los pares, de los pares de pares (y así sucesivamente) de partículas hasta que finalmente se alcanza el último y más alto de todos los niveles, que contiene la información del centro de masa de todo el sistema (Aguilar 1992).

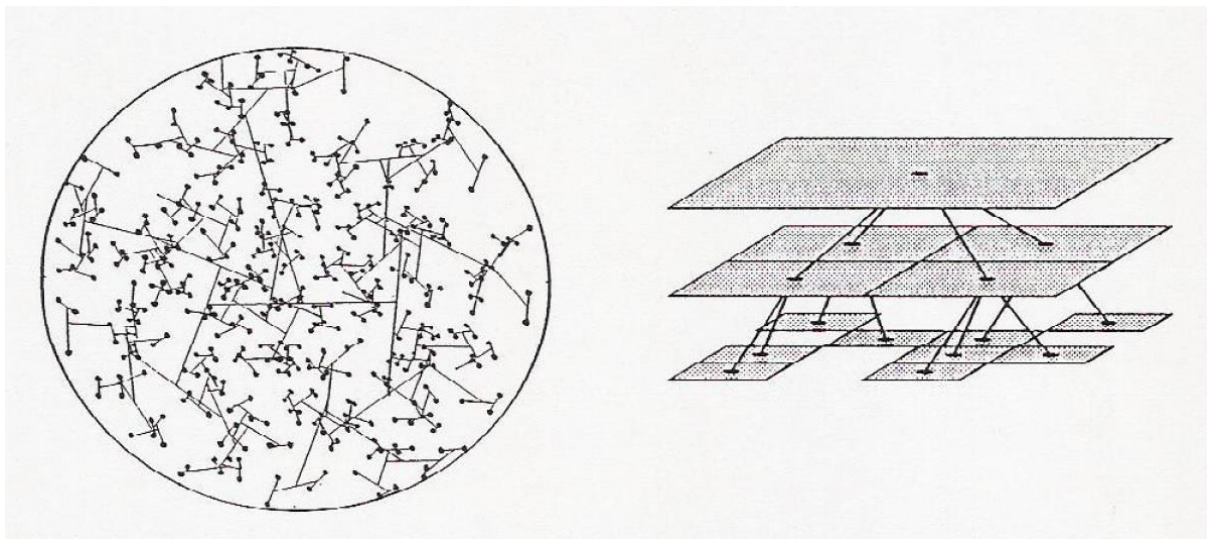


Figura 2.4. Ejemplos en dos dimensiones de las dos versiones de algoritmos de árbol en simulaciones de N -cuerpos: árbol binario (izquierda) y árbol octal (derecha). Reproducido de Aguilar 1992.

Los árboles octales, por su parte, son de más amplia aplicación en la literatura, y aunque siguen un proceso jerárquico similar al de los árboles binarios, presentan la siguiente variante: en ellos, el volumen donde se llevará a cabo la simulación es subdividido en celdas tridimensionales, de

tal forma que sólo las interacciones gravitacionales con las partículas en celdas cercanas se calcularán individualmente, mientras que aquellas con las partículas más lejanas se calcularán simplificándolas a una sola interacción con una partícula masiva —resultado de la suma de las partículas individuales lejanas—, ubicada en el centro de masa de la celda correspondiente. De esta manera, el número de cálculos por realizar en un código de árbol con N partículas crecerá como N veces el logaritmo de N , es decir, estos códigos están caracterizados por ser de orden $O(N \log N)$, sin duda más eficientes que los códigos de suma directa (Trenti y Hut 2008).

Específicamente, en el árbol octal de Barnes y Hut (1986) el espacio tridimensional de la simulación está completamente contenido en un gran cubo que incluye la totalidad de las partículas. Luego, este gran cubo se subdivide en 8 octantes. Cada octante es subdividido a su vez en 8 octantes más pequeños y así sucesivamente, hasta que la más fina subdivisión o celda tridimensional en el proceso incluya una sola partícula. Como es de esperarse, existirán regiones vacías que no contendrán una sola partícula independientemente del nivel de subdivisión. Al mismo tiempo, la información del centro de masa de todas las partículas incluidas en una determinada celda es almacenada en los nodos correspondientes del árbol octal. La Figura 2.4 (derecha) muestra el proceso en su analogía de dos dimensiones haciendo uso de subdivisiones sucesivas en este caso en cuadrantes. Nótese cómo las más finas subdivisiones incluyen una sola partícula cada una.

Con este proceso de simplificación, el árbol octal por sí mismo reduce drásticamente el número de fuerzas a calcular entre pares de partículas individuales en el sistema, haciendo más eficiente la simulación.

Como explicaremos en detalle más adelante, las simulaciones numéricas realizadas en este trabajo estuvieron basadas en su totalidad en una versión mejorada de código de árbol de alta eficiencia desarrollada por Walter Dehnen (2000), el código GYRFALCON, donde el número de cálculos realizados se minimiza al punto de crecer tan sólo linealmente con el número de partículas, es decir un código de orden $O(N)$.

2.4.3 Códigos con expansión en funciones armónicas

Por este método se busca representar la fuerza gravitacional total sobre cada una de las partículas de un sistema por medio de una expresión matemáticamente equivalente, que en este caso se logra a través de una expansión finita de funciones conocidas como armónicos esféricos, las que mejor se adecúan precisamente a la simetría esférica característica en el modelaje de galaxias elípticas (Aguilar 1992). Los armónicos esféricos son funciones especiales que tienen su origen en el trabajo de Laplace y sus estudios sobre el potencial gravitacional en la mecánica newtoniana, representando la parte angular de la solución a su ecuación ($\nabla^2 \Phi = 0$) en coordenadas esféricas (Weisstein 2016).

Aunque el método de expansión en funciones armónicas tiene la limitante intrínseca de que, para su aplicación, el sistema modelado debe mantener una simetría global de la cual no debe apartarse demasiado para lograr que la expresión del potencial y las fuerzas en armónicos esféricos converja rápidamente, su implementación reduce significativamente el número de cálculos realizados en el método de integración directa. Similarmente a los códigos de árbol, la expansión con funciones armónicas es proporcional a $O(N \log N)$.

En la aproximación con armónicos esféricos, donde la expansión finita de términos es una expresión de hecho de la masa suavizada del sistema, las partículas responden a esa masa, no a las masas individuales de sus vecinas cercanas. Es así que la parte irregular (debida a encuentros cercanos) de las interacciones gravitacionales entre partículas queda descartada (ver Sección 3.3), de tal forma que cada una de tales partículas sólo percibirá el efecto conjunto de las más lejanas a través de su masa suavizada. De esta manera, el método de armónicos esféricos naturalmente tiene aplicación en sistemas no colisionales que conservan o se apartan poco de una simetría global.

Entre los trabajos de simulaciones de N -cuerpos de galaxias elípticas con aplicación del método de expansión en armónicos esféricos, destacan principalmente los de van Albada (1982), Merritt y Aguilar (1985) y Aguilar y Merritt (1990). Todos tienen conexión directa con esta investigación, representando tres de los antecedentes más sólidos en esta línea de trabajo sobre los que los resultados aquí presentados se basan.

2.4.4 Códigos de malla

Los códigos de malla son una alternativa más a las simulaciones de sistemas estelares no colisionales donde el propósito sigue siendo hacer más eficientes los cálculos por realizar. Para esto, el sistema por modelar se subdivide en una malla tridimensional, la cual puede ser cartesiana o basada en coordenadas polares esféricas. Luego, el código procede a calcular la densidad de masa en puntos previamente seleccionados como pueden ser los nodos de la malla utilizada. Con información de la densidad del sistema en estos puntos, es entonces posible estimar el potencial gravitacional a través de la ecuación de Poisson ($\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho$), una vez que la masa de cada una de las partículas es asignada al nodo más cercano, o bien repartida entre los varios nodos más cercanos (Binney y Tremaine 2008).

De manera similar a los códigos con expansión en funciones armónicas, en los códigos de malla las partículas no interactúan con sus vecinas cercanas sino sólo con el resto del sistema representado como un potencial suavizado (Trenti y Hut 2008). La solución a la ecuación de Poisson normalmente se logra por medio de la transformada rápida de Fourier, y el número de cálculos llega a crecer linealmente con el número de partículas, es decir puede alcanzar orden $O(N)$.

La variante de los códigos de malla conocida como P^3M proporciona una mayor resolución espacial al método tradicional, pues aunque hace uso del algoritmo estándar de una malla para calcular la contribución de partículas distantes a la fuerza gravitacional total sobre una partícula dada, se vale del método de la suma directa estricta para obtener la contribución a dicha fuerza de las partículas localizadas en la misma celda o en celdas adyacentes. Los códigos P^3M han tenido una amplia aplicación principalmente en el campo de las simulaciones cosmológicas (Efstathiou et ál. 1985).

Capítulo 3 Extracción orbital de simulaciones de sistemas no colisionales formados por colapso frío

3.1 Antecedentes del proyecto

En los comentarios iniciales a este trabajo, hemos descrito cómo el presente proyecto de investigación en el campo de la dinámica estelar *via* simulaciones numéricas quedó definido por el Dr. Luis Aguilar. El marco teórico básico y el plan de trabajo a distancia a seguir en esta Tesis fueron discutidos entre el Dr. Aguilar y el autor durante una breve estancia *ex profeso* de este último en el IAUNAM sede Ensenada, México, simultáneamente al entrenamiento introductorio recibido en el uso de códigos de N -cuerpos y a los conceptos elementales de la dinámica estelar que sustentan este trabajo. Previo a su inicio como proyecto de Tesis oficalmente adscrito al Departamento de Astrofísica de la UCM, el autor, ya de regreso en UTEP, tendría que garantizar dos elementos imprescindibles para un exitoso trabajo de asesoría y colaboración a distancia: 1) una rápida y constante comunicación con el Dr. Aguilar, principalmente en los inicios del proyecto para poderlo consolidar, cosa que se lograría a través del correo electrónico y ocasionalmente con el uso de *Skype* y 2) contar con los recursos computacionales necesarios localmente en UTEP para cumplir los objetivos específicos de esta investigación. Después de algunos intentos iniciales fallidos en UTEP por instalar y correr el ambiente NEMO en computadoras personales, ya a mediados del 2011 había una comunicación con el Dr. Peter Teuben y existía una versión estable y funcional de NEMO en los procesadores del proyecto *CyberSHARE* de esta universidad. Inicialmente, el autor tuvo acceso a un sólo procesador y a un máximo de 100 Gb de almacenamiento en tal proyecto, donde empezó el largo proceso de pruebas preliminares y de aprendizaje del uso y aplicación de rutinas en NEMO. A finales del 2012, el autor fue aceptado como estudiante doctoral en el Departamento de Astrofísica de la UCM. El inicio formal de esta Tesis se remonta a ese año, cuando ya fue respaldada institucionalmente por dicha universidad.

3.2 Objetivo y motivación

El objetivo del presente trabajo es la realización de simulaciones numéricas de N -cuerpos de sistemas inicialmente esféricos en el régimen no colisional de buena calidad, formados por colapso frío ($2T/|W| < 0.1$), con el propósito de extraer y clasificar, con un alto grado de confiabilidad, las órbitas estelares resultantes una vez que los sistemas se han relajado. Por medio de un código de N -cuerpos, este proyecto se centra en el estudio de la evolución gravitacional pura de partículas puntuales en el régimen no colisional y no disipativo.

Nuestro conocimiento actual de las galaxias elípticas demuestra que estos sistemas forman un conjunto más bien uniforme de sistemas autogravitantes. En el caso de las más luminosas, la rotación es despreciable y por tanto estos sistemas están sostenidos por la presión debida a los movimientos azarosos de sus estrellas. El paralelismo entre estas observaciones y las simulaciones de N -cuerpos de colapsos gravitacionales y mergers es evidente, pues tales simulaciones invariablemente arrojan perfiles tipo Jaffe, los cuales son muy similares a los $R^{1/4}$, excepto por una tendencia a una ley de potencias tipo r^{-3} (en proyección) a grandes radios.

Trabajos previos debidos a van Albada (1982) y Aguilar y Merritt (1990) han mostrado que además de que las simulaciones de N -cuerpos de colapsos gravitacionales reproducen los perfiles de densidad observados en galaxias elípticas, estos sistemas adquieren sus características formas elipsoidales (particularmente prolatas) una vez que han alcanzado un estado de equilibrio postrelajamiento. Más recientemente, el trabajo de Muzzio et ál. (2013) ha explorado la estabilidad y estructura orbital de modelos triaxiales (inicialmente esféricos) de galaxias elípticas, construídos siguiendo el método de Aguilar y Merritt (1990). Además de identificar las órbitas características de modelos triaxiales como son las órbitas resonantes tipo tubo a lo largo de los ejes mayor y menor de la galaxia (las llamadas SAT y LAT), los autores reportan un porcentaje mayoritario de órbitas caóticas (en algunos casos hasta de 85% del total).

La presente investigación retoma el problema de la estructura orbital de sistemas esféricos colapsados y relajados a través de simulaciones de N -cuerpos de buena calidad, en este caso adoptando una aproximación alternativa basada en: 1) condiciones iniciales “frías” (el colapso gravitacional de los modelos esféricos es posible una vez que tales modelos son sacados de su equilibrio virial inicial tal que $2T/|W| < 0.1$) y 2) una extracción orbital directa (las órbitas resultantes de los modelos una vez relajados son extraídas directamente de la simulación de N -cuerpos, no a través de la obtención de un potencial suavizado como es práctica común en la literatura).

3.3 Herramientas principales

Describimos las tres herramientas principales para la realización de este proyecto:

1) Código de N -cuerpos.

Como punto de partida, es indispensable para este trabajo un código de N -cuerpos capaz de realizar simulaciones con millones de partículas de manera rutinaria, el cual deberá correr en una plataforma computacional comúnmente accesible. Dicho código simulará únicamente las interacciones gravitacionales entre las partículas del sistema en el régimen no colisional. Por otro lado, no requerirá una geometría particular para el sistema modelado en su totalidad.

2) Extractor de órbitas.

Una vez que la evolución del sistema modelado se ha seguido con el código de N -cuerpos, es importante contar con una herramienta numérica capaz de extraer eficientemente las órbitas individuales de las partículas del sistema directamente de los archivos correspondientes de posiciones y velocidades.

3) Caracterizador/clasificador orbital.

Con datos de posiciones y velocidades de partículas individuales, finalmente se hace necesario un código que realice una clasificación confiable de cada una de las órbitas extraídas de la simulación.

Tanto el extractor como el clasificador orbital deberán correr automáticamente con intervención mínima por parte del usuario, dado que necesitamos procesar un alto número de órbitas.

3.3.1 Elección del código de N -cuerpos (GYRFALCON)

Existen actualmente varios códigos de N -cuerpos de acceso gratuito que resultan de utilidad para este proyecto. Entre ellos se encuentran GADGET (Springel, Yoshida y White 2001), un código de árbol ampliamente utilizado, así como GYRFALCON (Dehnen 2000), un código de árbol con conservación de momento de alta precisión. Igualmente, existen ambientes computacionales completos que contienen los códigos mencionados y una amplia gama de herramientas numéricas para crear condiciones iniciales, visualizar resultados y realizar análisis de datos, como es el caso de NEMO (Teuben 1995).

Después de un rápido análisis preliminar, tanto el código GYRFALCON como el ambiente NEMO mostraron ser las opciones naturales para la realización de este proyecto. GYRFALCON, probablemente el mejor código de árbol actualmente disponible para el tipo de simulaciones de N -cuerpos no colisionales como las de este trabajo, forma parte de NEMO, por lo que este ambiente fue adquirido e integrado a la red local de procesadores de UTEP a través tanto del Dr. Rodrigo Romero y el *CyberSHARE Center for Excellence*, como de la Dra. Patricia Teller en la ahora conocida como la Nube (“*Research Cloud*”) de esta universidad. Todas las corridas y experimentos numéricos de esta Tesis han sido realizados en NEMO en la mencionada red de procesadores locales (Figura 3.0).



Fig. 3.0. Procesadores del *Virtual Computing Lab* de la Nube (*Research Cloud*) de UTEP donde fueron realizados todos los experimentos numéricos de este trabajo.

GYRFALCON es el acrónimo en inglés de “*GalaxY simulators using the Force Algorithm with Complexity $O(N)$* ”, el código completo para simulaciones de N -cuerpos implementado en NEMO y basado en el algoritmo original FALCON de Walter Dehnen (2000, 2002), utilizado para calcular las fuerzas entre las N partículas de un sistema. El código es una versión refinada del método de árbol de Barnes y Hut (1986) en combinación con el método rápido de multipolos (FMM) de Greengard y Rokhlin (1987). Tomando los mejores elementos de ambas aproximaciones, FALCON emplea una distribución jerárquica de celdas cúbicas tipo árbol y calcula las fuerzas entre sus centros de masa haciendo una expansión multipolar (interacción “celda-celda”). Esta expansión se logra por medio de una serie de Taylor cartesiana y no de armónicos esféricos como lo hace el FMM, previo cómputo de los momentos multipolares de cada celda. Con esto, FALCON logra reducir el orden en el número de cálculos por realizar para estimar fuerzas entre partículas a tan sólo $O(N)$, la gran virtud del código (Fig. 3.1), que lo hace sustancialmente más rápido que un código de árbol estándar por un factor de 10 (ver Sección 2.4.2 arriba).

El diseño del código permite que FALCON reduzca los errores en el cálculo de fuerzas y la inversión en tiempo de cómputo. Aunque su orden es $O(N)$, empíricamente se confirma en la misma Figura 3.1 que para un número de partículas $N \geq 10^4$, el tiempo de CPU invertido crece de hecho sublinealmente con N (Dehnen 2002), que es el caso en este proyecto donde $N = 10^6$ para la esfera Hernquist original fuera de equilibrio virial tomada como referencia al inicio de nuestras simulaciones.

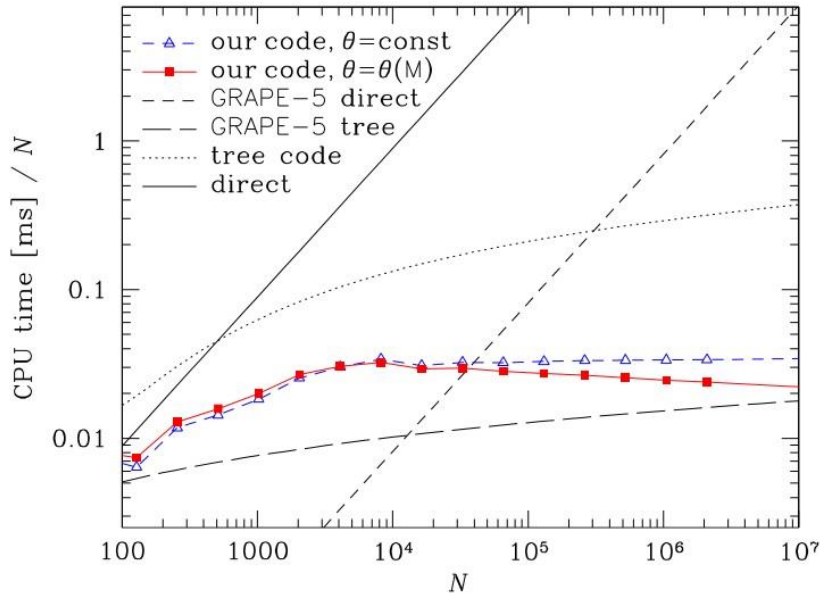


Figura 3.1. Comparación del desempeño en tiempo de CPU por partícula (Pentium III/933 MHz PC) en función de N de algoritmos basados en el método de suma directa, el código de árbol tipo Barnes y Hut, el sistema GRAPE -5 y FALCON con parámetro de tolerancia (θ) constante y en función de la masa. FALCON es sólo superado por el sistema GRAPE-5 en su versión árbol para $N \geq 30,000$. Tomado de Dehnen (2002).

Aunque los detalles de nuestros modelos y simulaciones con GYRFALCON son discutidos más adelante en esta Tesis, podemos decir de manera general que una corrida típica de prueba por 10 tiempos dinámicos con este código integrador requiere del orden de 3 días de tiempo de

CPU, dados los parámetros de integración y el paso de tiempo constante usados en este proyecto. De esta forma, una corrida con un tiempo de integración equivalente a 85 tiempos dinámicos en los procesadores de la Nube de UTEP requiere una inversión de ~ 24 días de tiempo de CPU.

Durante la realización de simulaciones numéricas con códigos de N -cuerpos, es común que éstas no sigan las *órbitas* reales de partículas en el potencial gravitatorio dado por el sistema, sino tan sólo *trayectorias*, entendidas como una concatenación de segmentos de órbitas. Como sabemos, esto no es más que el resultado del pequeño valor de N (comparado con los sistemas reales) utilizado en esos códigos y el hecho de que la colisionalidad de un sistema depende del número de partículas que contiene. Como resultado de las fluctuaciones introducidas por las colisiones, el camino de una partícula es el de una órbita auténtica por cierto tiempo, para luego ser desviada y seguir otra órbita distinta, y así sucesivamente, resultando al final en un camino que no corresponde al de una órbita verdadera.

Recordemos que el objetivo fundamental de esta tesis es el poder simular numéricamente sistemas esféricos en colapso gravitatorio frío ($2T/|W| < 0.1$), donde la colisionalidad intrínseca se ha reducido a un mínimo, para así realizar la extracción orbital correspondiente. Este objetivo es alcanzable dado el número relativamente alto de partículas seleccionado (10^6) y los valores particulares de los parámetros principales de la simulación de N -cuerpos en GYRFALCON (épsilon y theta), los cuales garantizan, fundamentalmente, una excelente conservación de energía total en el sistema, así como la conservación de las energías individuales de sus partículas constituyentes. Es sólo bajo este escenario que los caminos trazados por las estrellas en el potencial gravitacional pueden ser considerados verdaderas órbitas, no sólo simples trayectorias.

3.3.2 El extractor orbital (EXTRILLA)

Cada simulación de N -cuerpos con el código integrador GYRFALCON arroja un archivo de salida de gran tamaño, típicamente de 60 Gb, en el formato natural *snapshot* del ambiente NEMO, conteniendo toda la información cinemática del sistema en un estado de relajación

donde el cociente virial $2T/|W|$ es ya prácticamente igual a la unidad, con oscilaciones menores al 1% bajo las condiciones de colisionalidad mínima arriba mencionadas.

Con el objetivo principal de facilitar y hacer más eficiente la manipulación numérica de tales archivos, es conveniente convertirlos a un formato más *ad hoc* con las herramientas y códigos numéricos utilizados en este trabajo. Así, la conversión de datos de salida fue hecha al formato ASCII, la que a pesar de arrojar archivos aún más voluminosos que los originales, permitió la fácil implementación de por lo menos dos códigos subsecuentes en el análisis de datos, incluido el clasificador orbital TAXON.

La extracción de órbitas de nuestros experimentos numéricos fue posible a través de EXTRILLA, un código en FORTRAN especialmente escrito para este proyecto por la Dra. Tunna Baruah y el autor, ambos profesores del Departamento de Física de la Universidad de Texas en El Paso. La versión más reciente de este código es capaz de extraer 10^6 órbitas en aproximadamente 50 horas de CPU en los procesadores de la Nube de UTEP, lo cual implica una velocidad de extracción de $\sim 20,000$ órbitas por hora. Tal velocidad resulta convenientemente eficiente para los objetivos de este trabajo, donde es indispensable disponer de un método numérico semi-automático que permita la extracción —y eventualmente, clasificación— de miles de órbitas en un tiempo razonable, del orden de varios días.

El código extrae órbitas basado en una rutina que lee de un archivo de salida ASCII y ordena eficientemente las posiciones

$$(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}),$$

al tiempo t_j (con $i = 1, 2, 3, \dots, 4096$) de todas las partículas individuales en nuestra muestra por un proceso recursivo. Hay que señalar que el archivo de salida GYRFALCON no arroja órbitas de manera directa, sino las posiciones y velocidades del total de partículas a intervalos temporales determinados por la frecuencia de salida de datos establecida en la simulación. El código EXTRILLA básicamente reordena este archivo de salida para, por medio de la concatenación de las posiciones de partículas individuales a distintos tiempos a lo largo de todo el intervalo de integración, lograr establecer sus órbitas específicas.

3.3.3 El clasificador orbital (TAXON)

Una vez satisfechas las condiciones impuestas de no colisionalidad y, por lo tanto, asegurando que los caminos descritos por las partículas del sistema son órbitas reales y no meras trayectorias, nuestro siguiente objetivo fue caracterizar con precisión las diferentes poblaciones de órbitas estelares presentes en nuestros modelos.

Clasificar la multitud de órbitas resultantes de nuestros sistemas inicialmente colapsados bajo condiciones frías hacía necesario un código eficiente y bien probado como TAXON (Carpintero y Aguilar 1998). TAXON es de particular utilidad en este proyecto por el carácter automático de este código, el cual permite la rápida clasificación de grandes cantidades de órbitas, como las de este trabajo, donde TAXON lee directamente de un archivo de datos las posiciones espaciales de partículas en función del tiempo (órbitas). El código está basado en el concepto de *dinámica espectral* (Binney y Spergel 1982), donde el proceso de clasificación hace uso de la transformada de Fourier de la serie de tiempo para cada coordenada espacial, de tal forma que es posible obtener las componentes sinusoidales que constituyen las órbitas.

Nuestra meta era el poder clasificar eficiente y rápidamente cientos de miles de órbitas de una forma semiautomática con TAXON, es decir, sin la necesidad de intervención permanente por parte del usuario durante la corrida del código, cuya última versión de 2015 (Carpintero 2015, comunicación personal) utilizamos en este trabajo de Tesis. Cada corrida con TAXON nos permitió clasificar órbitas con gran precisión una vez se cumplieron las siguientes dos condiciones: 1) Que cada órbita individual estuviera muestreada uniformemente con un total de al menos 4096 puntos (x, y, z) , pues este número en TAXON siempre debe ser una potencia de 2 y 2) Que se garantizara un mínimo de 80 y un máximo de 300 períodos cubiertos por cada órbita. Esto se traduce en una tasa de muestreo óptima de ~ 50 puntos por período orbital para cada partícula. Puesto que todas nuestras órbitas extraídas consisten de 4096 puntos, fue el segundo criterio el que nos permitió evaluar la calidad de nuestro proceso de clasificación, una vez —como veremos más adelante— que los cambios en las energías de partículas individuales fueron minimizados.

3.4 Simulaciones de N-cuerpos de colapsos fríos y modelos

En esta sección, presentamos y discutimos en detalle las simulaciones de N -cuerpos de configuraciones esféricas durante su primera etapa de formación, esto es, la etapa definida por un colapso frío inicial. Los tres objetivos principales son:

- 1) Demostrar que dado un número suficientemente alto de partículas, los parámetros óptimos de la simulación numérica de un colapso frío y un tiempo de relajación postcolapso suficientemente largo, es posible obtener condiciones de colisionalidad mínima en un sistema donde las energías individuales de las partículas se conservan con un alto grado de precisión, garantizando que los caminos seguidos por estas son en realidad órbitas, no trayectorias, lo que llevará a un ejercicio confiable de extracción orbital.
- 2) Demostrar que, sin necesidad de “congelar” la configuración final para extraer un potencial estacionario, los resultados sobre los tipos de órbitas presentes una vez completado el proceso de extracción orbital directa de la simulación, son consistentes con los de otros trabajos reportados en la literatura.
- 3) Dejar establecido que la estabilidad de los sistemas resultantes y la clasificación orbital obtenidas de esta investigación son elementos confiables al punto de poder ser utilizados como base para la posterior construcción de sistemas autoconsistentes de galaxias basados en el método de superposición orbital de Schwarzschild (1979).

Los objetivos arriba descritos se han podido lograr en este proyecto siguiendo una línea de trabajo cuyas etapas pueden sintetizarse de la siguiente manera:

- a) Inicio a partir de una configuración esférica de partículas en equilibrio con un perfil de masa aplicable a galaxias elípticas, con un núcleo cuspidal.
- b) Por medio de cambios predeterminados a los valores iniciales (en equilibrio) de las energías potencial y cinética de dicho sistema, llevarlo a una configuración de

desequilibrio virial donde $2T/|W| < 0.1$, por definición conocidas como condiciones “frías”, debidas a la disminución en la energía cinética total del sistema.

- c) Dejar colapsar gravitacionalmente y evolucionar el sistema para alcanzar paulatinamente condiciones de equilibrio, período durante el cual el relajamiento violento y el mezclado de fase juegan un papel crucial.
- d) Una vez que el sistema ha adquirido un estado estacionario con $2T/|W| = 1$, iniciar el proceso de integración de órbitas, asegurando la conservación de la energía total y momento lineal del sistema.
- e) Verificar la estabilidad y equilibrio del sistema, a través de la constancia del cociente virial total y de las componentes del tensor de inercia (forma final del sistema), así como de la conservación de las energías de las partículas individuales.
- f) Extraer las correspondientes órbitas de partículas individuales resultantes de la simulación “viva” de N -cuerpos.
- g) Clasificar tales órbitas e identificar los principales grupos orbitales presentes en el sistema.

A continuación, analizamos cada una de las etapas descritas, en las cuales hacemos uso de las herramientas previamente mencionadas: el ambiente NEMO y el código integrador GYRFALCON durante las etapas (a—e), el extractor de órbitas EXTRILLA durante la etapa (f) y el código TAXON de clasificación orbital en la etapa (g).

3.4.1 Configuración inicial en equilibrio y pruebas preliminares

La elección del perfil de densidad específico y definitivo para nuestra configuración esférica inicial de partículas en equilibrio estuvo precedida por una larga serie de pruebas preliminares, al mismo tiempo que el autor adquiría las destrezas necesarias en el uso del ambiente NEMO. Durante estas pruebas, varios modelos con perfiles de densidad tipo Plummer (1911) en equilibrio virial y con un número creciente de partículas (entre 1, 000 y 20, 000) fueron creados en el ambiente NEMO por medio de la rutina MKPLUMMER, permitiendo fundamentalmente verificar el nivel de colisionalidad y la conservación de la energía total de tales configuraciones

conforme N aumentaba (Tabla 3.1) con los valores constantes de $\varepsilon = 0.05$ y $\theta = 0.6$ dados por defecto en GYRFALCON.

No. partículas modelo Plummer	Δt	N_{pasos}	$ E_f - E_i / E_i $	t_{cpu} [minutos]
1, 000	0.3	400	0.491	0.03
	0.15	800	0.262	0.06
	0.075	3, 200	0.037	0.13
	0.0375	6, 400	3×10^{-3}	0.28
	0.01875	12, 800	9×10^{-4}	0.58
20, 000	0.3	400	0.07	0.8
	0.15	800	0.02	1.6
	0.075	3, 200	1.7×10^{-3}	3.35
	0.0375	6, 400	4.4×10^{-5}	6.7
	0.01875	12, 800	1.8×10^{-4}	13.4

Tabla 3.1. Pruebas preliminares con GYRFALCON en el modelo Plummer.

El perfil de Plummer, originalmente propuesto por su autor (Plummer 1911) para describir la distribución esférica de masa en cúmulos globulares, fue usado en esta temprana etapa de pruebas dada la simplicidad de su construcción en NEMO. Variaciones a los modelos Plummer tales como cambios a la geometría esférica inicial fueron introducidos eventualmente, dando al sistema por ejemplo forma oblata adoptando distintos valores de elipticidad, seguido de las correspondientes corridas por tiempos cortos y de las pruebas de estabilidad.

Después de la realización de las pruebas preliminares con perfiles de densidad esféricos tipo Plummer, hicimos uso de un perfil de densidad teórico que, hay que señalar, reproduce muy adecuadamente las características observacionales de galaxias elípticas. Fue así que un perfil tipo Hernquist (1990) fue utilizado por primera vez en nuestras simulaciones. A diferencia del modelo Plummer, el cual posee un núcleo de densidad finita y decae como r^{-5} a grandes radios

(más rápido que lo observado en galaxias elípticas), un perfil Hernquist posee dos características que lo hacen una mejor aproximación a estos objetos astronómicos,

- i) decae como r^{-4} a grandes radios, más consistente con las observaciones y
- ii) en su parte central tiene lo que es conocido como un núcleo cuspidal, es decir, un núcleo donde la densidad es muy alta y adquiere una pendiente pronunciada descrita aproximadamente por una ley de potencia, hecho también consistente con las observaciones de galaxias elípticas en el Universo (Figura 3.2).

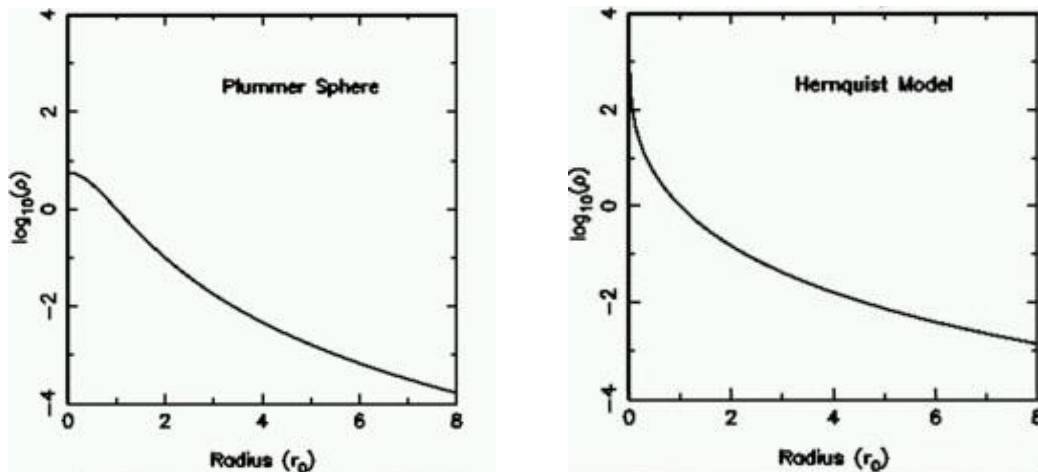


Fig. 3.2. Gráficas comparativas de los perfiles de densidad de Plummer (izquierda) y Hernquist (derecha) para potenciales esféricos. El modelo Plummer posee un núcleo de densidad constante donde la curva tiende a aplanarse, mientras que el Hernquist muestra una clara cúspide donde la densidad aumenta muy rápido (reproducidas de Flynn 2010).

El perfil Hernquist se caracteriza por ser un modelo matemáticamente simple para una distribución esférica de masa cuyas propiedades fundamentales son derivables analíticamente, incluyendo el perfil de luminosidad proyectado —que reproduce adecuadamente el bien conocido perfil de de Vaucouleurs de galaxias elípticas—, la dispersión de velocidades y, fundamentalmente, la función de distribución. Estas características hacen del Hernquist un modelo ampliamente utilizado en la literatura y, como es el caso en este trabajo de Tesis, de

fácil construcción en NEMO para generar las condiciones iniciales de modelos de potenciales esféricos en simulaciones de N cuerpos (Baes y Dejonghe 2002).

El modelo de Hernquist, expresado como el par densidad-potencial gravitacional, está dado por

$$\rho(r) = \frac{Ma}{2\pi r(r+a)^3} \quad \Phi(r) = \frac{-GM}{r+a} \quad (3.1)$$

donde M es la masa total y a es el radio de escala. Así, el *radio de masa media*, definido como

$$r_{1/2} = 1 + \sqrt{2a} \quad (3.2)$$

es una buena medida de la escala espacial de la esfera Hernquist, radio con el que a su vez definimos el *tiempo de cruce* (t_{cr}), es decir, el tiempo que le tomaría a una estrella localizada al radio de masa media cruzar por completo el sistema. El tiempo de cruce es la unidad de escala temporal utilizada en este trabajo (usualmente equivalente al tiempo dinámico).

Una configuración de partículas que satisfaga las propiedades del perfil de Hernquist y que sirva de partida, como condición inicial, para un modelo esférico fuera de equilibrio virial en una simulación numérica, es construible en el ambiente NEMO haciendo uso de la rutina MKDEHNEN, ya que el perfil Hernquist es un caso particular de un perfil más general conocido como el perfil de Dehnen (1993), cuya densidad está dada por

$$\rho(r) = \frac{(3-\gamma)M}{4\pi} \frac{a}{r^\gamma(r+a)^{4-\gamma}}, \quad (3.3)$$

y que naturalmente reproduce el Hernquist para $\gamma = 1$.

El siguiente paso en este trabajo fue construir numéricamente en NEMO una distribución esférica de masa de 1 millón de partículas en equilibrio virial que satisficieran el perfil de densidad de Hernquist, sin rotación inicial (Figura 6). Un millón de partículas, tomando como referencia los resultados de las pruebas preliminares con el modelo Plummer, resultaba un

número suficientemente alto y aún computacionalmente manejable para garantizar en el sistema las condiciones de colisionalidad mínima requeridas en esta investigación. La Tabla 3.2 resume las propiedades de las esferas Hernquist construidas.

Modelo Hernquist $2T/ W = 1$			
No. de partículas	Masa	Radio de escala	% de partículas con rotación positiva alrededor de eje z
10^6	1	1	50

Tabla 3.2. Parámetros básicos de las esferas Hernquist construidas en NEMO.

Después de una rápida serie de pruebas de estabilidad y de conservación de energía y momento lineal totales a la esfera Hernquist construida, procedimos a realizar el cambio de escala correspondiente en las energías cinética y potencial totales del sistema pues, como lo hemos mencionado, nuestro objetivo es sacar a dicha esfera de equilibrio virial para crear condiciones de colapso frío.

3.4.2 Condiciones iniciales de desequilibrio virial con $2T/|W| < 1$

Una distribución de partículas en equilibrio virial ($2T/|W|=1$) es un sistema autogravitante en estado estacionario cuya forma y estructura globales son constantes en el tiempo. Si el sistema es sacado de tal equilibrio, ya sea porque $2T/|W| < 1$ o $2T/|W| > 1$, las condiciones cambiarán y el sistema tenderá a colapsarse o expandirse tratando de reestablecer ese balance original perdido entre sus energías cinética y potencial.

Ya el trabajo pionero de van Albada (1982) había demostrado que es posible reproducir el característico perfil de de Vaucouleurs de las galaxias elípticas a través de simulaciones de N-cuerpos, una vez que en ausencia de procesos disipativos se da el colapso gravitatorio y relajación de un sistema de partículas definido inicialmente por pequeños movimientos aleatorios. Aunque el trabajo de van Albada analiza sistemas en desequilibrio virial con $2T/|W| < 1$, sus cocientes viriales no llegan a ser tan pequeños como para explorar el régimen $2T/|W| < 0.1$, entendido actualmente como el régimen de colapsos “fríos”. Los experimentos numéricos posteriores de Merritt y Aguilar (1985) y Aguilar y Merritt (1990) sí abordarían tal régimen, demostrando el papel de la llamada inestabilidad de órbita radial (ROI).

Simultáneamente a imponer que $2T/|W| < 0.1$, a manera de una segunda restricción, introdujimos en este trabajo el criterio de adoptar un valor arbitrario determinado para la energía total de amarre del sistema (E_i), valor que naturalmente definirá el tamaño físico (r) inicial del mismo, dado que $r \sim 1/|E_i|$. Después de varios ensayos y pruebas, $E_i = -0.1$ resultó ser nuestra mejor opción, puesto que este valor numérico permitía una suave y uniforme tendencia asintótica en el tiempo del cociente virial hacia la unidad, a un estado de relajación en nuestras simulaciones. Adicionalmente y de manera muy importante, $E_i = -0.1$ facilitaba una óptima conservación de energía y momento lineal en nuestros experimentos numéricos, requisito indispensable para una configuración final lo suficientemente confiable a partir de la cual una robusta extracción de órbitas individuales fuera posible.

De esta forma, las dos restricciones impuestas a nuestra distribución de partículas fueron:

- a) Un cociente virial inicial frío donde $(2T/|W|)_0 = C$, $0 < C < 0.1$ y
- b) Una energía inicial total de amarre $E_i = -0.1$,

las que naturalmente se traducen en un par de ecuaciones lineales acopladas

$$2T/|W| = C \quad \text{y} \quad T+W = -0.1. \quad (3.4)$$

Puesto que $W < 0$,

$$2T = -CW \quad \text{y} \quad T+W = -0.1.$$

Después de resolver para ambas energías, cinética y potencial, estas adquieren valores numéricos particulares una vez que se ha hecho el correspondiente cambio de escala tanto de las posiciones como de las velocidades iniciales de las partículas del modelo Hernquist original en equilibrio, dados los factores de escala f_v (velocidades) y f_p (posiciones), definidos como

$$f_v = \sqrt{\frac{T}{T_i}} \quad \text{y} \quad f_p = \frac{W_i}{W}, \quad (3.5)$$

donde T_i y W_i son las energías cinética y potencial iniciales del sistema en equilibrio virial, mientras que T y W son las correspondientes energías necesarias en la nueva configuración fría fuera de equilibrio para lograr un cociente virial $0 < C < 0.1$ y una energía total de amarre igual a -0.1 .

3.4.3 Optimización de parámetros (ϵ , θ) y construcción de modelos fríos

Dado el cambio de escala señalado arriba para proveer a nuestro sistema de las correspondientes condiciones frías, procedimos a seguir el proceso de colapso y relajación. Para ello, dos parámetros básicos del código de integración —la *longitud de suavizado* (ϵ) y el *parámetro de tolerancia* (θ)— serían cruciales para lograr el nivel de precisión en la conservación de las energías individuales de partículas, pues la optimización de ϵ y θ como veremos redundarán en un error fraccional de energía total (E_{fe}) mínimo, definido como

$$E_{fe} = \frac{E_f - E_i}{E_i}, \quad (3.6)$$

donde E_i y E_f son las energías inicial y final totales del sistema, respectivamente. Los objetivos de esta Tesis imponían de principio lograr construir modelos cuya energía total se conservara con un error fraccional suficientemente pequeño, menor a un factor de 10^{-4} , por lo que este requisito exigía encontrar los valores idóneos de ϵ y θ que garantizaran tal objetivo en nuestras simulaciones de N -cuerpos.

En este punto, queremos enfatizar que esta etapa del desarrollo de nuestro trabajo de investigación requirió un tiempo inesperadamente largo de pruebas, pues siguiendo un método

de ensayo y error puro, nuestra meta era encontrar los valores numéricos concretos de los parámetros de la simulación, con precisión al centésimo, que después de una corrida preliminar corta por un tiempo aproximado de 10 tiempos dinámicos, arrojaran condiciones tales que

- a) $E_{fe} < 10^{-4}$
- b) El sistema en su conjunto mostrara evidencia de tender al equilibrio virial en un tiempo razonable de varios días de tiempo de CPU.

Como ese largo y penoso período de pruebas lo demostraría, determinadas combinaciones de ϵ y θ podrían por ejemplo lograr conservar la energía total excelentemente bien, pero al costo de hacer el proceso de relajación sumamente lento. Por otro lado, una combinación distinta podría llevar a que el sistema empezara a ganar o perder energía paulatinamente prácticamente desde los primeros instantes de la integración.

Por lo tanto, la clave radicaba en encontrar el balance adecuado. La búsqueda de este balance significó una meticulosa y sistemática exploración del espacio de parámetros (ϵ , θ), de tal manera que durante las mencionadas corridas cortas de prueba, manteníamos uno de tales parámetros constante (digamos ϵ) mientras hacíamos variar θ centésimo a centésimo. Cada una de tales variaciones venía acompañada de su correspondiente corrida de prueba por 10 tiempos dinámicos, equivalente en promedio a ~ 3 días de tiempo de CPU, así como del correspondiente cálculo de E_{fe} . Esta aproximación “manual” a la búsqueda de los parámetros óptimos ϵ y θ en nuestros experimentos numéricos, en retrospectiva podemos decir fue un ejercicio exitoso que rindió frutos al verse reflejado en la calidad de las simulaciones de N -cuerpos que más adelante discutimos.

La exploración de los parámetros óptimos arriba descrita se realizó desde un principio para dos modelos distintos (A y B) en condiciones de desequilibrio virial, cuyas características generales se muestran en la Tabla 3.3, donde ϵ_{op} y θ_{op} son los valores numéricos concretos de ϵ y θ que minimizan el error en la conservación de energía total. Cabe mencionar que una tercera configuración fría de partículas fue construida con $(2T/|W|)_0 = 0.01$ (en principio, el modelo C), con el propósito de lograr un punto de comparación con el modelo más frío de Aguilar y Merritt (1990). Desafortunadamente, después de varios intentos y aun con los parámetros óptimos

descritos arriba y otros más también explorados, fue imposible lograr un sistema estable que tendiera a largo plazo al equilibrio virial conservando su energía total en tiempos de CPU cortos.

Modelo	No. partículas	$2T/ W $	E_{amarre}	ϵ_{op}	θ_{op}
A	10^6	0.05	-0.1	0.035	0.200
B	10^6	0.08	-0.1	0.035	0.200

Tabla 3.3. Parámetros de la simulación de los modelos A y B, incluido el par (ϵ, θ) que optimiza la conservación de energía en ambos casos.

El procedimiento seguido en NEMO para la construcción numérica de estos modelos fríos puede resumirse en los siguientes puntos:

- 1) Construcción de una esfera Hernquist en equilibrio virial con los parámetros señalados en la Tabla 3.2 (arriba).
- 2) Por medio del comando HACKFORCE, se agregó al modelo Hernquist información del potencial gravitacional (previo cambio de precisión sencilla a doble en el formato del archivo snapshot correspondiente).
- 3) Ya sea por medio del comando SNAPVIRIAL, o de manera directa, se realizó el cambio de escala de posiciones y velocidades en el modelo Hernquist en equilibrio para crear condiciones frías de disequilibrio virial en los modelos A y B. Después de varias pruebas y errores, el cambio de escala directo a través de los factores de escala f_p y f_v descritos en la sección 3.4.2 resultó ser una mejor opción, una vez que se incluyó la restricción adicional de la energía de amarre $E_i = -0.1$ en ambos modelos.

A continuación, presentamos la segunda etapa de nuestras simulaciones numéricas donde analizamos el colapso gravitatorio y el proceso de relajación de nuestros dos modelos rumbo a un estado de equilibrio virial.

3.4.4 Colapso bajo condiciones frías ($2T/|W| < 0.1$) y relajación de modelos

El colapso y relajación de nuestros modelos A y B fuera de equilibrio virial y sin rotación son ilustrados a través de una serie de cuadros (Figuras 3.4 y 3.5) con las proyecciones espaciales de los sistemas a dos dimensiones sobre uno de los planos principales, el XZ . La proyección a este plano en particular se justifica por el hecho de que, como veremos más adelante, después de que los sistemas se han relajado y alcanzado un estado de equilibrio y forma final constante (prolata o cuasi prolata), la elongación de ambas configuraciones de partículas se da a lo largo del eje X del esferoide, y es particularmente evidente en su proyección al plano XZ . De esta manera, los cambios paulatinos en la forma de los sistemas conforme estos avanzan a un estado estacionario van siendo identificados más fácilmente sobre tal proyección.

Si definimos el *tiempo de cruce* (t_{cross}) como el tiempo que le toma a una partícula del sistema localizada al *radio medio de masa* ($r_{1/2}$) recorrer esta distancia en caída libre, las imágenes con la evolución de los modelos A y B en las figuras 3.4 y 3.5 están separadas por un tiempo constante de $5 t_{\text{cross}}$, —30 unidades de tiempo en la simulación—, iniciando con la esfera Hernquist original ($t = 0$) sometida a condiciones frías de desequilibrio virial. Las secuencias en las Figuras 3.3 y 3.4 indican que no es sino hasta aproximadamente $t = 90$ ($15 t_{\text{cross}}$) que los sistemas empiezan a dar evidencia de la presencia de una elongación (barra) central. Las imágenes subsecuentes y las configuraciones geométricas finales que los sistemas alcanzan demuestran que tal barra mantiene su forma y su orientación aproximadamente constantes.

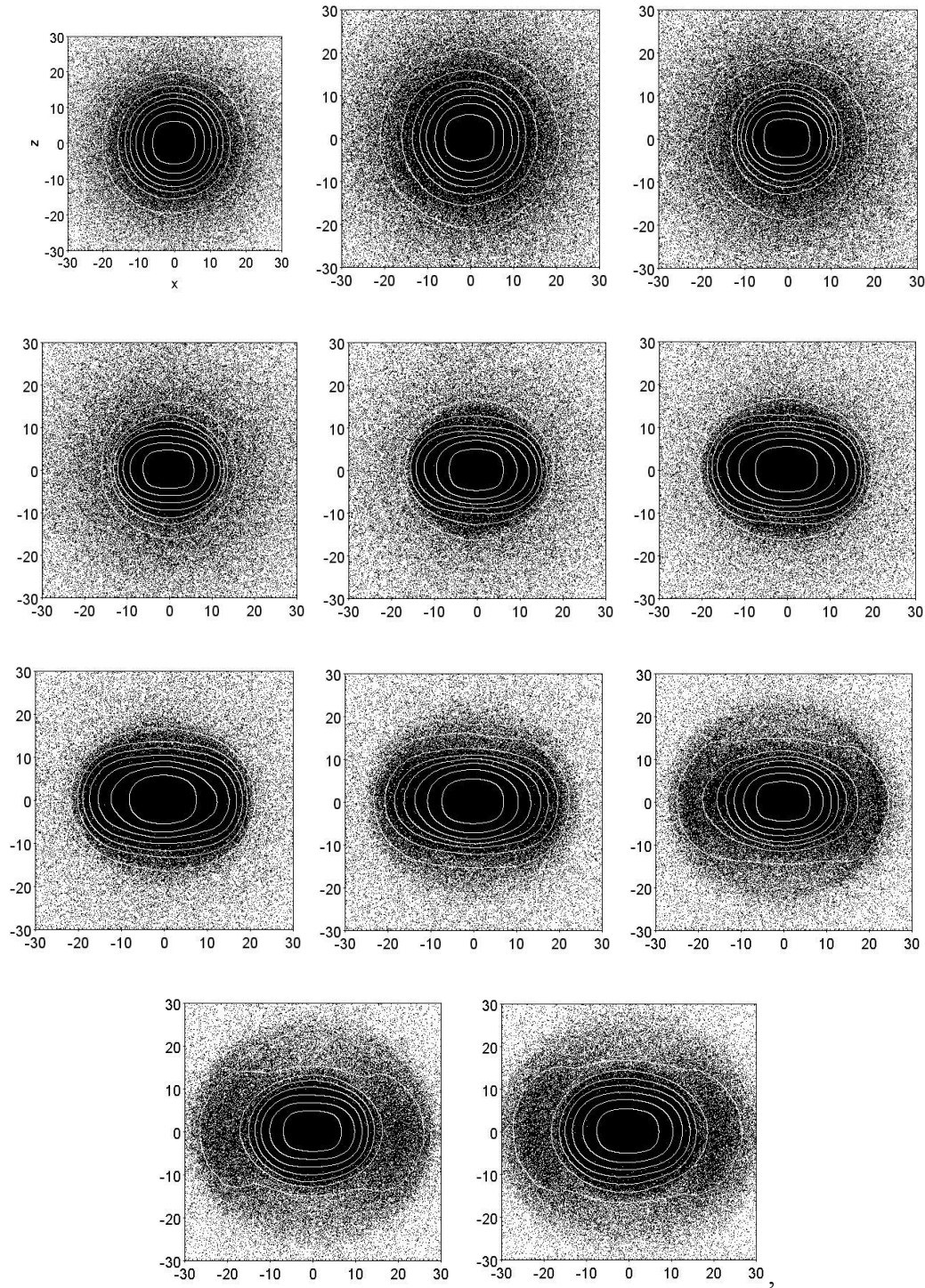


Fig. 3.3. Secuencia de imágenes con las proyecciones al plano XZ del modelo A ($(2T/|W|)_0 = 0.05$) en colapso y relajación desde su configuración original $t = 0$ hasta $t = 300$ ($50 t_{\text{cross}}$), siendo $t = 600$ el tiempo total de integración dado a este modelo. El espaciamiento entre imágenes es de $5 t_{\text{cross}}$. El plano XZ está sobre el plano de la imagen. Los contornos de isodensidad ilustran el grado de elipticidad.

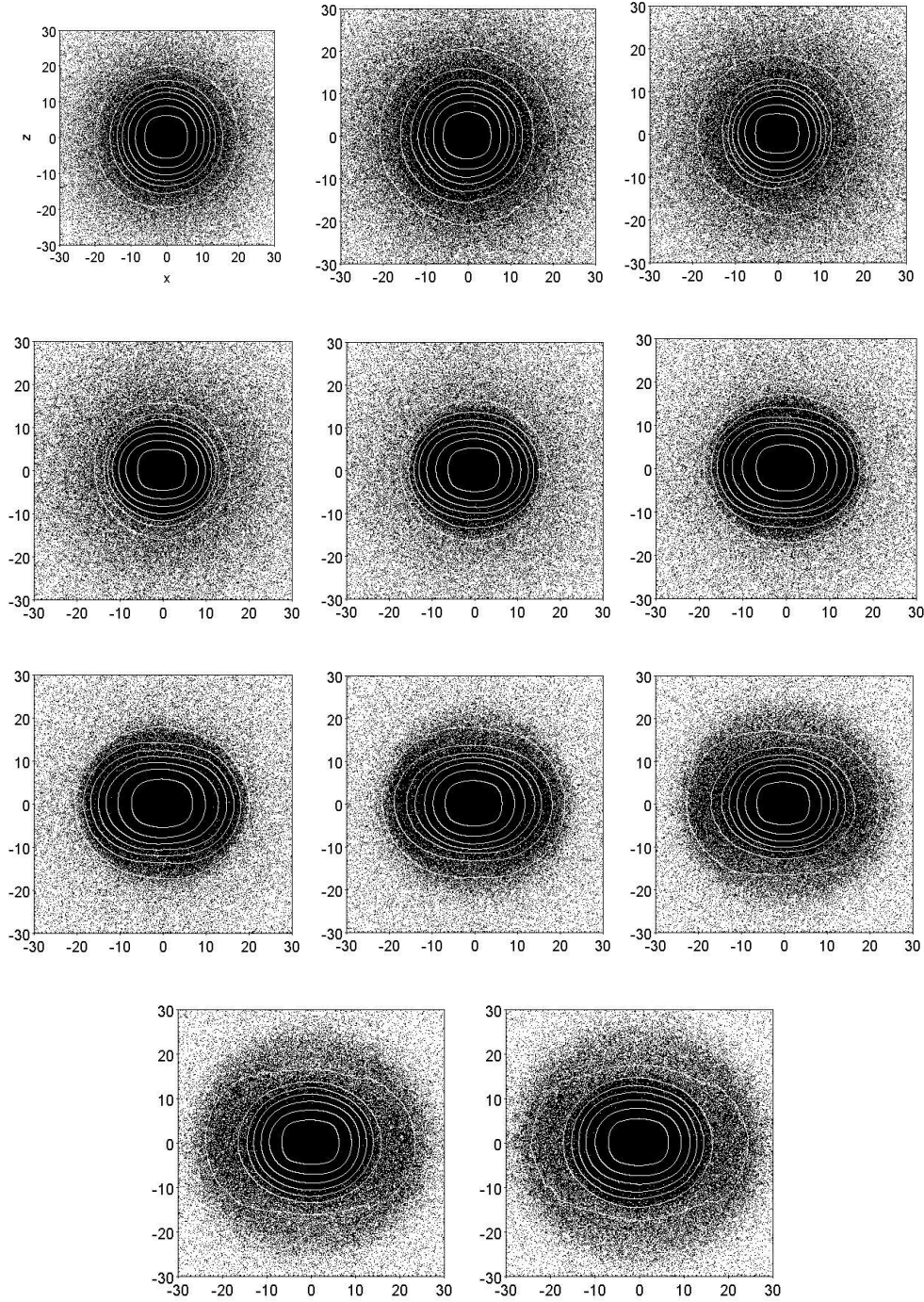


Figura 3.4. Secuencia de imágenes con las proyecciones al plano XZ del modelo B ($(2T/|W|)_0 = 0.08$) en colapso y relajación desde su configuración original $t = 0$ hasta $t = 300$ ($50 t_{\text{cross}}$), siendo $t = 420$ el tiempo total de integración dado a este modelo. El espaciamiento entre imágenes es de $5 t_{\text{cross}}$. El plano XZ está sobre el plano de la imagen. Los contornos de isodensidad ilustran el grado de elipticidad.

Basados fundamentalmente en el cociente virial de cada uno de nuestros sistemas (Figura 3.5), fue posible determinar que el modelo A ($2T/|W| = 0.05$) había alcanzado un estado cuasi estacionario con $2T/|W| \sim 1.0$ a $t = 600$, es decir después de $100 t_{\text{cross}}$ de colapso y relajación. El modelo B dio muestra de haberse virializado después de $t = 420$ ($70 t_{\text{cross}}$).

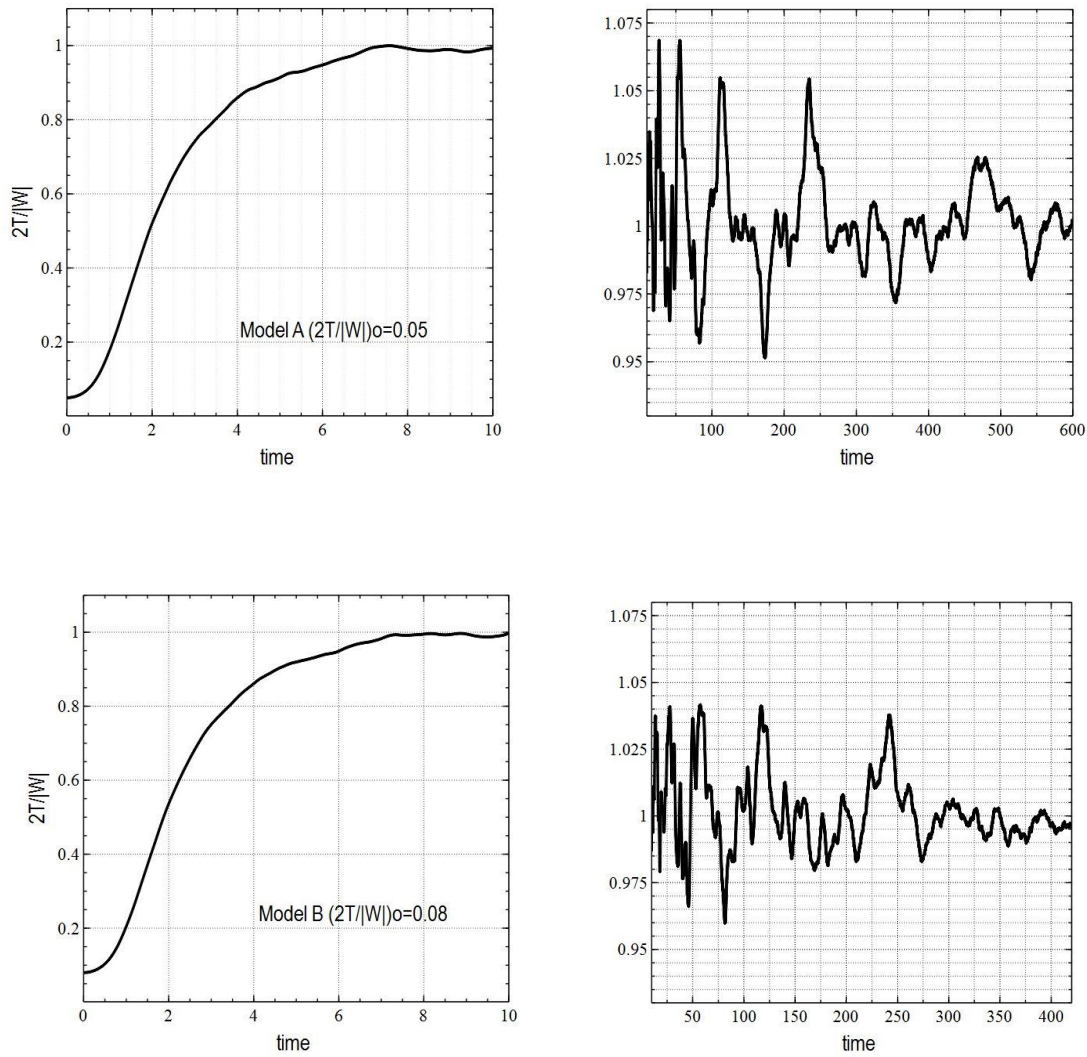


Fig. 3.5. Gráficas a la derecha (arriba y abajo): cociente virial ($2T/|W|$) como función del tiempo durante la etapa completa de colapso y relajación de los modelos A y B. El modelo A (arriba) muestra evidencia de virialización hacia $t = 600$ ($t_{\text{cross}} = 100$), mientras que el modelo B (abajo) parece hacerlo hacia $t = 420$ ($t_{\text{cross}} = 70$). Gráficas a la izquierda (arriba y abajo): nótese la rápida evolución de las configuraciones frías originales a un estado de equilibrio virial entre $t = 0$ y $t = 10$.

Al final de la etapa de relajación, tanto en el modelo A como en el B observamos una buena conservación de la energía mecánica total (Figura 3.6), dados los parámetros óptimos ϵ_{op} y θ_{op} . Aun así, es importante señalar el cambio de energía total del sistema observado justo durante el colapso inicial, que es el momento donde el relajamiento violento genera cambios tan bruscos y rápidos en el potencial que el código no logra compensar de manera igualmente eficiente con el respectivo cambio en energía cinética para así mantener la energía total constante. El mismo relajamiento violento cambia las energías de las partículas individuales del sistema en esta etapa (Binney y Tremaine 2008), verificándose igualmente el mezclado de fase (ver Sección 1.5.2.2).

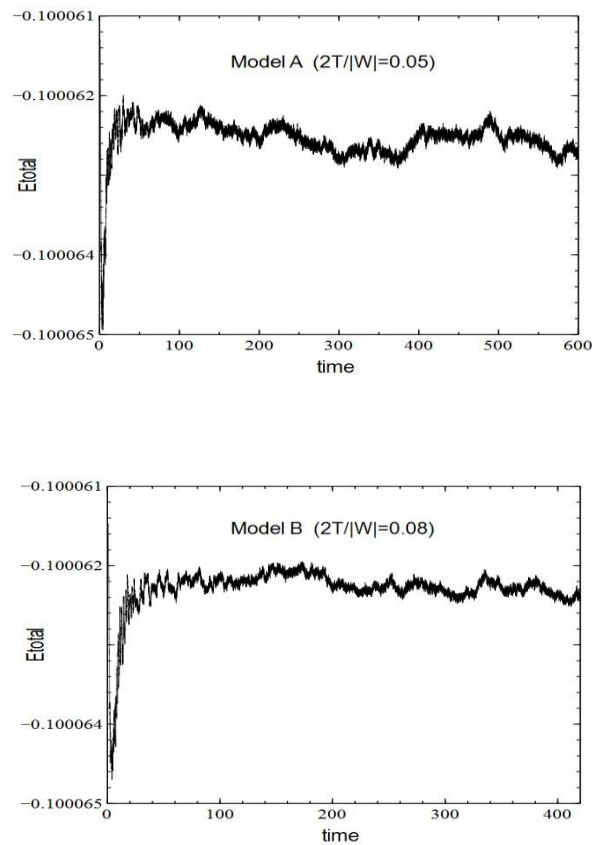


Fig. 3.6. Energía total contra tiempo en los modelos A (arriba) y B (abajo) durante la fase de colapso y relajación. Las curvas muestran un crecimiento drástico durante el colapso inicial. Los rápidos cambios en el potencial, inducidos por el relajamiento violento, no logran ser completamente balanceados por el código con los correspondientes cambios en energía cinética.

Los respectivos errores fraccionales en energía total (E_{fe}) en los dos sistemas, con base en los datos de la Figura 3.6, están dados en la Tabla 3.4. Como puede verse, ambos errores son de magnitud comparable y menores que 10^{-4} .

Modelo	Energía inicial total ($t = 0$)	Energía final total	E_{fr}
A	-0.1000613523	-0.1000627232 ($t = 600$)	1.37×10^{-5}
B	-0.1000615147	-0.1000624003 ($t = 420$)	8.85×10^{-6}

Tabla 3.4. Errores fraccionales de energía total en los modelos A y B.

3.4.5 Formas finales de los esferoides resultantes

En esta sección, hacemos una revisión de las formas geométricas adoptadas por los esferoides resultantes del proceso de colapso y relajación de la etapa anterior, una vez que estos han logrado virializarse y alcanzar un estado estacionario.

Determinar qué forma adquiere una configuración relajada de partículas (oblata, prolata o triaxial) se facilita, por ejemplo, rotando el sistema de tal manera que sus ejes principales coincidan con los ejes coordenados X , Y , Z . Para esto, se hace uso del *tensor de inercia*, el objeto matemático que en forma precisa describe cómo la masa se encuentra distribuída en el sistema de partículas. En forma matricial, el tensor de inercia es una matriz simétrica \mathbf{S} , cuya inversa \mathbf{S}^{-1} (también simétrica) es la clave para la rotación de los ejes principales del sistema a los ejes X , Y , Z . Similarmente, es posible calcular la longitud de los semiejes de la distribución esferoidal de partículas a partir de los eigenvalores de \mathbf{S} y sus correspondientes raíces cuadradas.

El ambiente NEMO incorpora este formalismo a sus rutinas para hacer posible la rotación de sistemas y el cálculo de sus semiejes principales. Previo a estos cálculos, sin embargo, es importante establecer un criterio para seleccionar las partículas que serán tomadas en cuenta en el cálculo del tensor de inercia. Un criterio estándar es hacer tal cálculo conservando un determinado porcentaje de las partículas más fuertemente ligadas gravitacionalmente al sistema, cuyas energías de amarre individuales son calculadas por el código a lo largo de la integración.

Siguiendo una regla común (p.ej. Aguilar y Merritt 1990; Zorzi y Muzzio 2012), en este trabajo calculamos orientación y semiejes de nuestros esferoides utilizando el 80% de las partículas más ligadas (80% mbp) a $t = 600$ (Modelo A) y a $t = 420$ (Modelo B). La Figura 3.7 presenta las distribuciones de masa correspondientes a los modelos A y B una vez que se eliminó el 20% de las partículas menos ligadas en cada uno. Como en la etapa de relajación y las Figuras 3.3 y 3.4 arriba, los esferoides han sido rotados para que los planos XY , XZ y YZ correspondan con el plano de la imagen (recordemos también que la elongación de nuestros esferoides es más evidente en el plano XZ).

En NEMO, la eliminación del 20% de las partículas menos ligadas fue posible mediante la rutina UNBIND, que excluye partículas de una distribución basada en un valor predeterminado para la energía de amarre crítica (E_c), tal que partículas con energía individual mayor que E_c son eliminadas. El valor numérico de esta energía crítica no se conoce *a priori*, por lo que hay que realizar una serie de pruebas para calcularla. De nuestros experimentos, un valor de E_c calculado con precisión al milésimo (del orden de -0.061 y -0.065 en los dos distintos modelos) garantizaba la retención del 80% de las partículas más ligadas. Por otro lado, la rotación de los esferoides a los ejes principales se logra con la rutina SNAPRECT, que diagonaliza el tensor de inercia.

Los modelos A y B de la Figura 3.7 muestran claramente que la distribución de masa de 800, 000 partículas está dominada por una componente central, elongada y extensa: la barra resultante de la ROI mencionada en la sección anterior, presente en nuestros colapsos fríos con geometría originalmente esférica *à la* Hernquist. Tal elongación, rodeada por un tenue halo

estelar, finalmente define las formas globales cuasi prolata y prolata de las dos configuraciones, según mostramos más adelante.

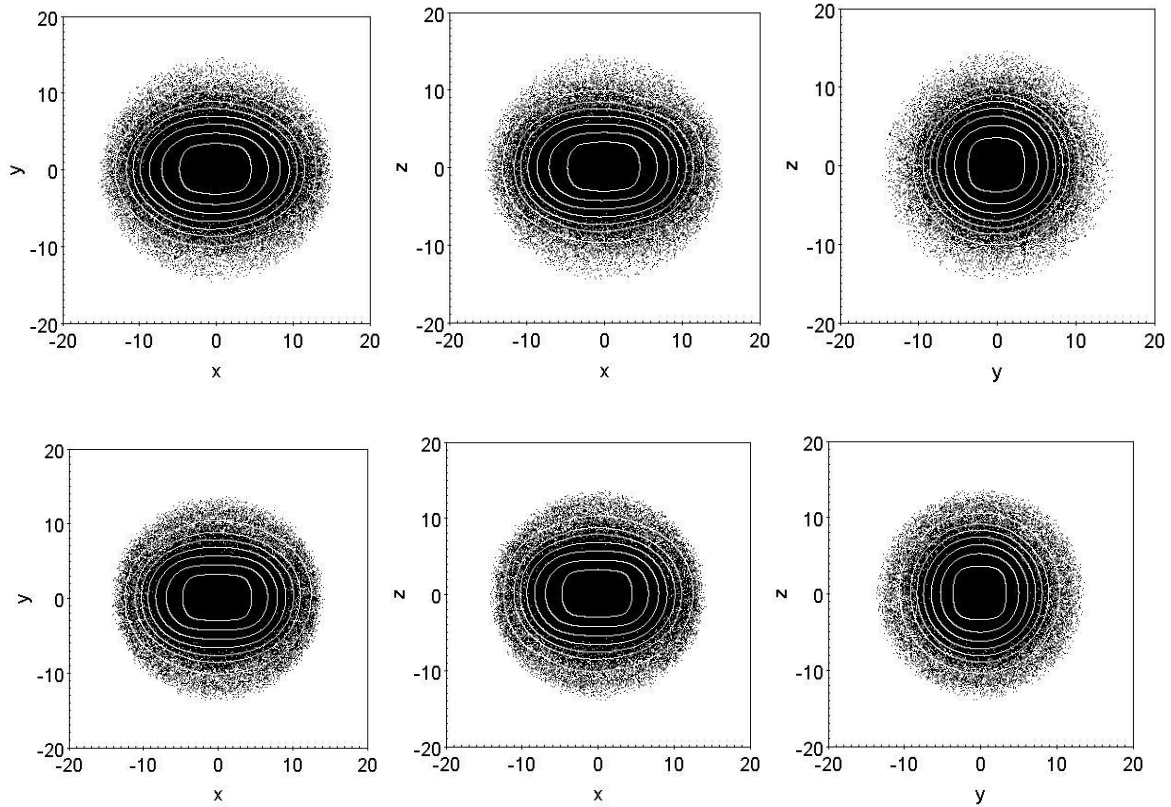


Fig. 3.7. Formas finales de los esferoides en los modelos A (tríada superior) y B (tríada inferior), mostrados en sus tres proyecciones espaciales XY , XZ y YZ , respectivamente de izquierda a derecha. La barra central domina la distribución de masa conteniendo 80% de las partículas más ligadas (80% mbp) de los sistemas. Define también sus formas cuasi prolata y prolata globales. Los esferoides fueron rotados para hacer coincidir los planos XY , XZ y YZ con el plano de la imagen. Los contornos de isodensidad ilustran la elipticidad.

Tomando como referencia el trabajo de Aguilar y Merritt (1990), hacemos uso del *índice de triaxialidad* (τ) para calcular la forma final de nuestros modelos A y B mostrados en la Figura 3.7. Definido como

$$\tau \equiv \frac{b-c}{a-c}, \quad (3.7)$$

donde a , b , c son los semiejes mayor, intermedio y menor, respectivamente, del elipsoide en consideración, este parámetro permite identificar el grado de triaxialidad de una distribución de partículas; asimismo, si tal distribución es oblata ($\tau = 1$) o prolata ($\tau = 0$). El valor de $\tau = 1/2$ corresponde a una distribución triaxial donde la longitud del eje intermedio del esferoide es el promedio de las longitudes de los ejes menor y mayor.

Como fue señalado anteriormente, las longitudes de los semiejes a , b , c de la distribución de partículas (con $a > b > c$) están dadas por las raíces cuadradas de los eigenvalores del tensor de inercia, de tal forma que

$$a = \sqrt{e_1} \quad b = \sqrt{e_2} \quad c = \sqrt{e_3}, \quad (e_3 < e_2 < e_1).$$

Los semiejes de los esferoides, su elipticidad y parámetro de triaxialidad se muestran en la Tabla 3.5 a continuación. El tensor de inercia de los esferoides y sus respectivos eigenvectores y eigenvalores e_1 , e_2 y e_3 fueron calculados en NEMO a través de la rutina SNAPINERT. Esta rutina permite la obtención tanto del tensor de inercia en su forma matricial como de su inversa para realizar la rotación del sistema a los ejes principales.

Modelo (80% mbp)	Semiejes	c/a	Parámetro τ
A ($t=600$)	$a = 2.8778$	0.66	0.109
	$b = 2.0035$		
	$c = 1.8961$		
B ($t=420$)	$a = 2.7877$	0.7	0.006
	$b = 1.9635$		
	$c = 1.9585$		

Tabla 3.5. Semiejes principales y parámetro de triaxialidad en los modelos A y B con 80% de las partículas más ligadas.

Los pequeños valores del parámetro de triaxialidad calculados para ambos modelos nos permiten afirmar que, siendo más cercanos a 0 que a 1, las formas finales postrelajación de los modelos A y B pueden ser razonablemente bien descritas como las de un esferoide cuasi prolato (A) y otro prolato (B); es decir, dos esferoides elongados a lo largo de su eje mayor, que en el caso de un esferoide de revolución representaría el eje de rotación del sistema.

La forma cuasi prolata y prolata —y no estrictamente triaxial— de estos esferoides puede verificarse rápidamente a través de la proyección espacial sobre el plano YZ en ambos modelos, en la tercera imagen de izquierda a derecha de la Figura 3.7. La configuración de partículas proyectada sobre el plano YZ muestra a simple vista evidentemente la menor elipticidad que presenta forma circular, o casi circular, mientras que los planos XZ y XY revelan qué tan elongado el modelo realmente es, particularmente en su proyección XZ como ya lo hemos señalado.

Para confirmar lo anteriormente dicho respecto a la forma final esencialmente prolata de los esferoides en los modelos A y B, realizamos un cálculo adicional esta vez tomando en cuenta

sólo el 60% de las partículas más ligadas (60% mbp) en los respectivos sistemas. Los resultados se muestran en la Tabla 3.6.

Modelo (60% mbp)	Semiejes	c/a	Parámetro τ
A (t=600)	a = 1.4998	0.57	0.129
	b = 0.9404		
	c = 0.8574		
B (t=420)	a = 1.5362	0.56	0.008
	b = 0.8726		
	c = 0.8675		

Tabla 3.6. Semiejes principales y parámetro de triaxialidad en los modelos A y B con 60% de las partículas más ligadas.

Igualmente, la Figura 3.8 muestra las proyecciones a los planos XY , XZ y YZ de los esferoides postrelajación resultantes si consideramos en este caso sólo el 60% mbp, confirmando gráficamente la prevalencia de las formas finales cuasiprolata y prolata en los modelos A y B.

Nuestros resultados de las formas intrínsecas finales de los esferoides analizados son así consistentes con las formas de galaxias elípticas prolatas y ligeramente triaxiales, es decir, las formas adoptadas por las galaxias elípticas más luminosas con una cinemática interna descrita por una dispersión de velocidades anisotrópica. Similarmente, y a pesar de pequeñas diferencias asociadas con el código utilizado y el diseño de la simulación en cada caso, las formas de los esferoides obtenidas en este trabajo reproducen los resultados de Aguilar y Merritt (1990) ante colapsos similares.

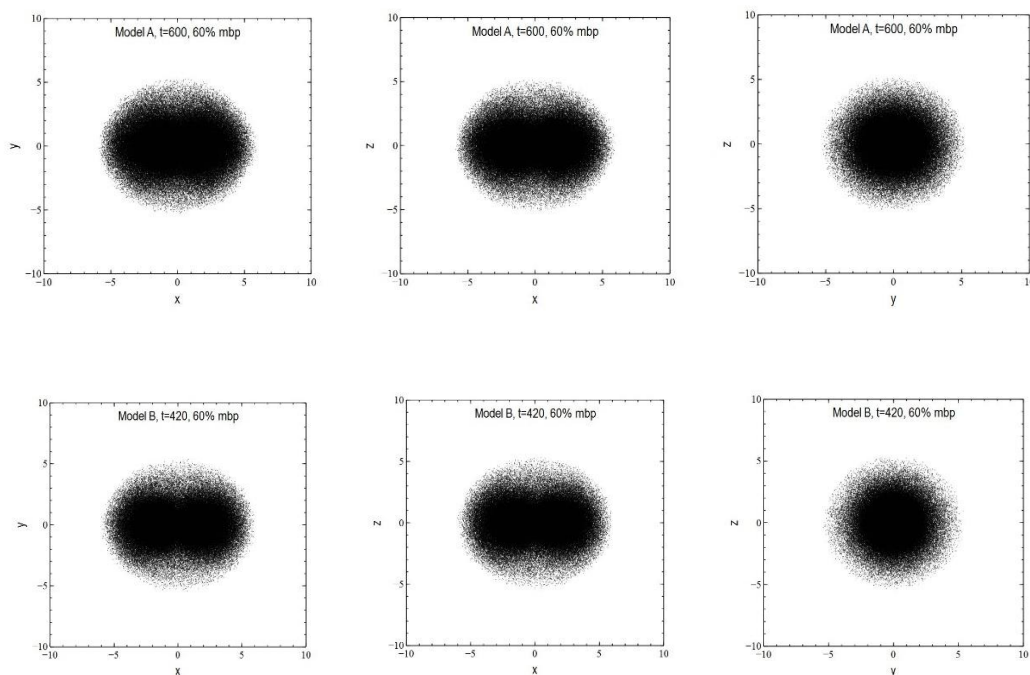


Fig. 3.8. Formas finales de los esferoides en los modelos A (tríada superior) y B (tríada inferior), en sus proyecciones a los planos XY , XZ y YZ , similar a la Figura 3.7, pero incluyendo sólo el 60% de las partículas más ligadas. La forma casi circular de los esferoides en su proyección YZ confirma las mismas formas globales cuasi prolata y prolata de aquella figura, cuyas elongaciones máximas se dan sobre el eje mayor X . Los esferoides fueron rotados para hacer coincidir los planos XY , XZ y YZ con el plano de la imagen.

3.5 Integración, extracción y clasificación de órbitas

Habiendo realizado las simulaciones de N -cuerpos y colapsos no disipativos de dos modelos en desequilibrio virial con condiciones frías ($2T/|W| < 0.1$), además de haber seguido su relajamiento logrando una excelente conservación de energía total, esta parte de nuestro trabajo de investigación se enfoca en la fase de integración numérica de órbitas, así como en los procesos de extracción y clasificación orbital.

Es en esta sección precisamente donde proporcionamos las pruebas y tests necesarios para demostrar que las partículas constituyentes de nuestros modelos siguen efectivamente órbitas,

en respuesta a la influencia del potencial gravitacional global generado por todo el sistema, y que en tales partículas, principalmente las menos ligadas, los efectos del relajamiento colisional son despreciables.

Para lograr esto, tomamos como condiciones iniciales los modelos A y B al tiempo final de la etapa anterior de colapso y relajación, para construir con ellos dos configuraciones de partículas análogas más, pero con el propósito de integrar las órbitas subyacentes. Recordemos que al final de la etapa de colapso y relajación, ambos modelos A y B alcanzaron un estado estacionario con $2T/|W| \sim 1.0$, lo que permite realizar la extracción y caracterización orbital.

3.5.1 Los modelos 1A y 1B, condiciones iniciales

No siendo ya el potencial gravitacional una función del tiempo, es precisamente a los tiempos finales $t = 600$ (Modelo A) y $t = 420$ (Modelo B) que de nuevo empezamos a integrar numéricamente ambas configuraciones. Los “nuevos” sistemas A y B fueron renombrados Modelos 1A y 1B para diferenciarlos de sus dos respectivos progenitores. Por lo tanto, 1A y 1B representan la primera extensión de nuestros modelos originales fuera de equilibrio virial a la etapa de equilibrio. Iniciamos así el proceso de integración de órbitas con un permanente monitoreo de la constancia en el tiempo de:

- a) Energía total del sistema.
- b) Cociente virial.
- c) Forma final del esferoide.
- d) Energías de partículas individuales.

La Tabla 3.7 presenta las condiciones iniciales utilizadas durante el proceso de integración de órbitas en los modelos 1A y 1B, dándoseles a ambos un tiempo total de integración de $t = 512$, equivalente a $85 t_{\text{cross}}$. Asimismo, en la Figura 3.9 ilustramos las dos distribuciones de partículas a $t = 600$ y $t = 420$, iniciando la integración de órbitas. Es importante señalar además una variante introducida en esta etapa: el cambio en los valores de los parámetros de la simulación,

i.e. la *longitud de suavizado* (ϵ) y el *parámetro de tolerancia* (θ). De forma similar al método de ensayo y error aplicado a nuestros modelos fríos originales fuera de equilibrio para encontrar el par (ϵ , θ) que optimizara la conservación de energía total, en esta etapa repetimos parcialmente ese ejercicio, el cual nos llevó a una nueva combinación (ϵ , θ) para optimizar la conservación de energía total durante la integración de órbitas, donde la estabilidad y equilibrio virial de los sistemas tenían que estar más que garantizados.

El método de prueba seguido fue idéntico al de las configuraciones frías iniciales, con la ventaja que ahora no partimos de un par de valores arbitrarios (ϵ , θ), sino que adoptando el par que optimizó la conservación de energía total en la etapa de colapso y relajación, hicimos variar ϵ y θ alrededor de tales valores, buscando la nueva combinación que, después de la misma corrida preliminar por 10 tiempos dinámicos, minimizara el error fraccional en la energía total del sistema. Los nuevos valores de ϵ y θ con los que realizamos la integración de órbitas en los modelos 1A y 1B se incluyen también en la Tabla 3.7. La Figura 3.9 muestra la distribución espacial inicial de estos modelos.

Modelo	No. partículas	$2T/ W$	E_{total}	ϵ_{op}	θ_{op}
1A	10^6	1.0026	-0.0999412000	0.038	0.204
1B	10^6	0.9991	-0.0998769666	0.040	0.200

Tabla 3.7. Parámetros iniciales de integración en los modelos 1A y 1B.

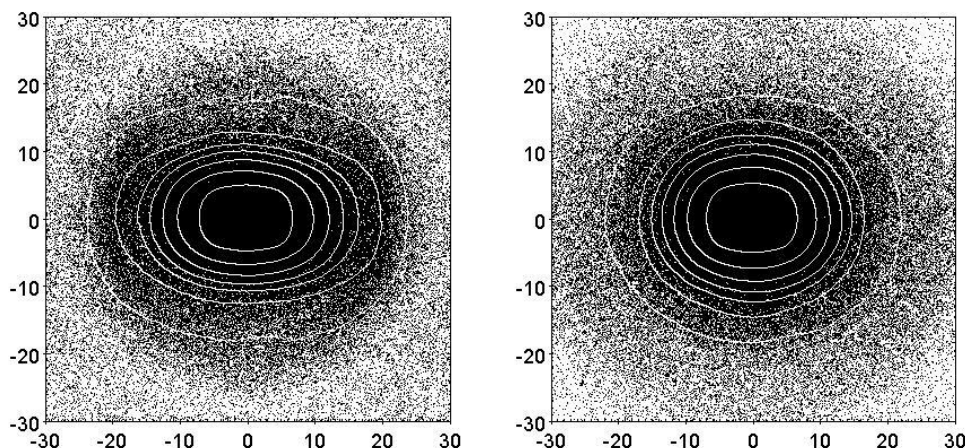


Fig. 3.9. Modelos 1A (izquierda) y 1B (derecha) en sus configuraciones iniciales cuasi prolata y prolata de 10^6 partículas a $t = 600$ y $t = 420$, respectivamente, en equilibrio virial, marcando el comienzo del proceso de integración de órbitas en ambos modelos de acuerdo a las condiciones iniciales de la Tabla 3.7. Los esferoides fueron rotados para hacer coincidir el plano XZ de estas proyecciones con el plano de la imagen. Los contornos de isodensidad ilustran la elipticidad.

3.5.2 Integración numérica de los modelos 1A y 1B

Habiendo establecido las condiciones iniciales para los modelos 1A y 1B, iniciamos su integración numérica. Haciendo uso de un nuevo par óptimo (ϵ, θ) para cada modelo, de un paso de tiempo $\Delta t = 0.00781$ y un tiempo total de integración de $t = 512$ ($85 t_{\text{cross}}$), requerimos que el código descargara datos de salida cada $t = 0.125$, es decir, 8 veces por cada unidad de tiempo de integración. El archivo de salida por lo tanto nos arrojó datos de la cinemática de 10^6 partículas un total de $8 \times 512 = 4096$ veces, lo que nos permitió construir un mapa espacial de las órbitas de todas y cada una de tales partículas en la configuración con un total de $4096 = 2^{12}$ puntos (x, y, z) . Como ya lo mencionamos con anterioridad, un número de puntos (x, y, z) por órbita igual a una potencia de 2 es uno de los requisitos del código de clasificación orbital usado en esta tesis (TAXON).

La selección del paso de tiempo $\Delta t = 0.00781$ para estas corridas con los modelos 1A y 1B no fue de ninguna manera aleatoria o arbitraria. Después de realizar otra serie de pruebas para

comparar paso de tiempo vs. tiempo de integración real en CPU, así como paso de tiempo vs. error fraccional en la energía total del sistema, un paso de tiempo $\Delta t = 0.00781$ nos permitió un balance tal que fue posible obtener errores fraccionales menores a 10^{-4} en tiempos de integración razonablemente largos del orden de $t = 512$ ($85 t_{\text{cross}}$); es decir, equivalentes a ~ 24 días de tiempo de CPU en los procesadores de la Nube de UTEP.

En la Figura 3.10, se muestra parte del archivo de salida con parámetros físicos globales durante una corrida típica con GYRFALCON. Estos parámetros vienen dados como función del tiempo conforme la integración numérica tiene lugar. Los más importantes son, de izquierda a derecha por columna: tiempo en unidades del sistema, energía total de la configuración, energía cinética, energía potencial, cociente virial y momento angular total.

```
# "gyrfalcon in=hern1M.05 out=hern1M.05.035.20.0-60 eps=0.035 theta=0.20 kmax=6.737
# tstop=60 logfile=datahern1M.05.035.20.0-60 give=mxvp step=10"
#
# run at Fri May 15 17:34:10 2015
# by "hnoriega"
# on "prod34"
# pid 14816
#
#
```

#	time	E=T+V	T	V_in	W	-2T/W	L	v_cm
#	0.000000	-0.1000613523	0.0025640	-0.1026253	-0.1025729	0.0500	0.00022	6.7e-05
	0.0078125000	-0.1000613538	0.0025642	-0.1026256	-0.1025731	0.0500	0.00022	6.7e-05
	0.0156250000	-0.1000613504	0.0025650	-0.1026263	-0.1025739	0.0500	0.00022	6.7e-05
	0.0234375000	-0.1000613547	0.0025663	-0.1026277	-0.1025752	0.0500	0.00022	6.7e-05
	0.0312500000	-0.1000613539	0.0025682	-0.1026295	-0.1025770	0.0501	0.00022	6.7e-05
	0.0390625000	-0.1000613531	0.0025706	-0.1026319	-0.1025793	0.0501	0.00022	6.7e-05
	0.0468750000	-0.1000613516	0.0025735	-0.1026349	-0.1025823	0.0502	0.00022	6.7e-05
	0.0546875000	-0.1000613519	0.0025770	-0.1026384	-0.1025857	0.0502	0.00022	6.7e-05
	0.0625000000	-0.1000613516	0.0025811	-0.1026424	-0.1025896	0.0503	0.00022	6.7e-05
	0.0703125000	-0.1000613537	0.0025857	-0.1026470	-0.1025941	0.0504	0.00022	6.7e-05

Fig. 3.10. Parte inicial y cabecera de un archivo de salida típico con parámetros físicos globales durante una simulación numérica con el código GYRFALCON, entre los cuales se incluyen la energía total del sistema, el cociente virial y el momento angular total como función del tiempo. Los datos mostrados corresponden a la etapa inicial de colapso y relajación del modelo A descrito anteriormente.

Particularmente durante esta etapa del desarrollo de nuestro trabajo, el monitoreo de los mencionados parámetros globales fue constante. Era indispensable que la energía total del sistema no mostrara cambios mayores a 10^{-4} , por ejemplo, y que el valor del cociente virial no

oscilara más allá de 1% alrededor del valor unitario, pues de la estabilidad y equilibrio del sistema dependería la calidad de las órbitas de partículas individuales por extraer, además de la buena conservación de sus energías, hecho que tendríamos que verificar *a posteriori* una vez concluída la corrida correspondiente a través del cálculo del error rms de tales energías, como mostraremos más adelante en la sección del análisis de órbitas de partículas individuales.

3.5.3 Conservación de parámetros globales en los modelos 1A y 1B

Habiéndose virializado después de un período de relajación mínimo de $70 t_{\text{cross}}$, presentamos aquí la evidencia numérica de la conservación de energía total y forma de los esferoides finales en equilibrio en nuestros modelos 1A y 1B, así como de la virialización misma de ambos sistemas. De igual manera, justificamos a través de la conservación de las energías de partículas individuales la existencia de órbitas reales -y no meras trayectorias- asociadas a dichas partículas.

La Figura 3.11 muestra la energía total del sistema como función del tiempo para ambos modelos. Con errores fraccionales en energía total de $E_{\text{fe}} = 3 \times 10^{-7}$ en el modelo 1A (mínimo error logrado en este trabajo) y de $E_{\text{fe}} = 4 \times 10^{-6}$ en el 1B, la energía total evidencia en realidad fluctuaciones mínimas durante el período de integración de $85 t_{\text{cross}}$ en ambos modelos.

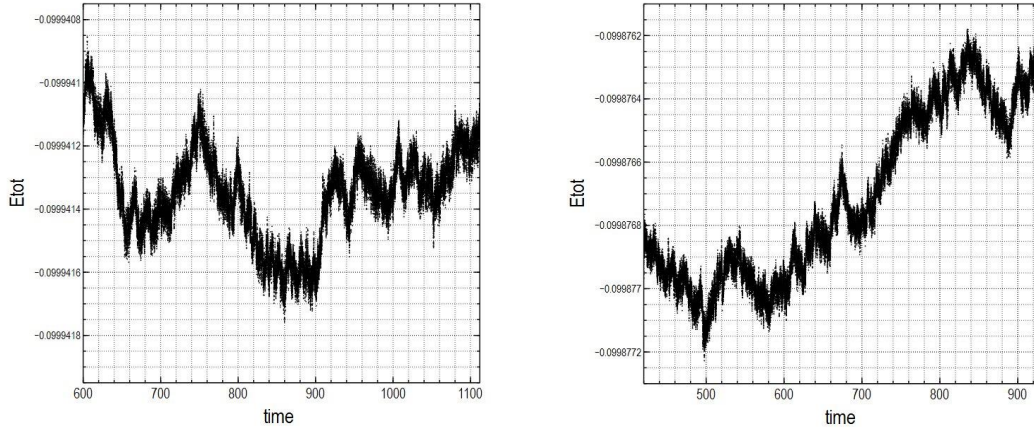


Fig. 3.11. Energía total como función del tiempo en los modelos 1A (izquierda) y 1B (derecha). El tiempo total de integración es $t=512$ ($85 t_{\text{cross}}$) en ambos con las condiciones iniciales de la Tabla 3.7. En ambas gráficas el eje vertical de energía total cubre un intervalo de 0.0000012 unidades.

Por otra parte, la evidencia de que los sistemas se virializaron y alcanzaron un estado de relajación se muestra en la Figura 3.12, donde graficamos el cociente virial también como función del tiempo a lo largo de toda la integración numérica en 1A y 1B. Las fluctuaciones en el cociente virial en este caso no exceden en promedio el 1%.

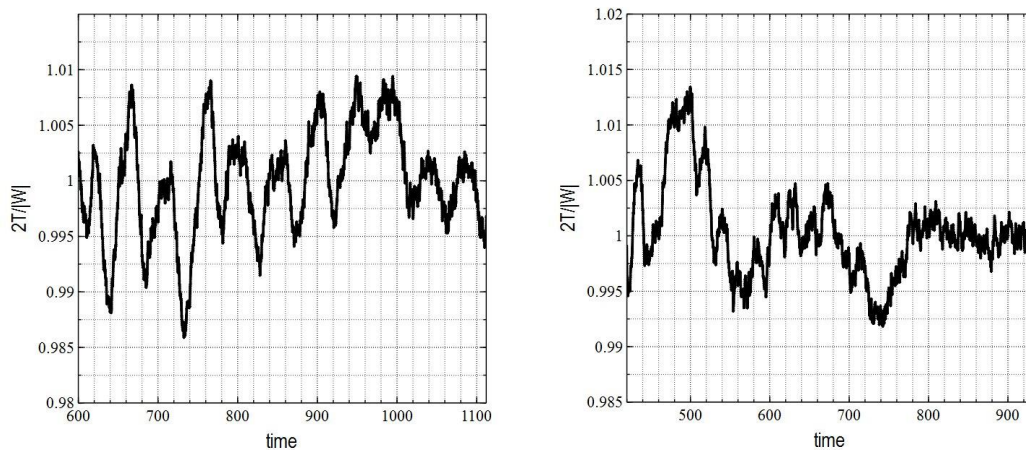


Fig. 3.12. El cociente virial $2T/|W|$ como función del tiempo en los modelos 1A (izquierda) y 1B (derecha). El tiempo total de integración es $t=512$ ($85 t_{\text{cross}}$) en ambos con las condiciones iniciales de la Tabla 3.7. Oscilaciones finas no mayores que 1% en promedio son identificadas en los dos sistemas, donde el eje vertical cubre un intervalo de 0.035 unidades del cociente virial.

Asimismo, en la Figura 3.13 seguimos la forma final de los esferoides relajados a lo largo del intervalo completo de integración. Aunque las pequeñas variaciones en el grado de elipticidad son evidentes, los esferoides mantienen su forma global fundamentalmente cuasi-prolata o prolata, dados los valores cercanos a cero adoptados por el parámetro de triaxialidad τ (τ), calculado para el 80% de las partículas más ligadas en ambas configuraciones. La Figura 3.14 complementa este análisis de la geometría final de nuestros modelos. En ella graficamos las variaciones como función del tiempo de los semi-ejes principales a, b y c de los esferoides.

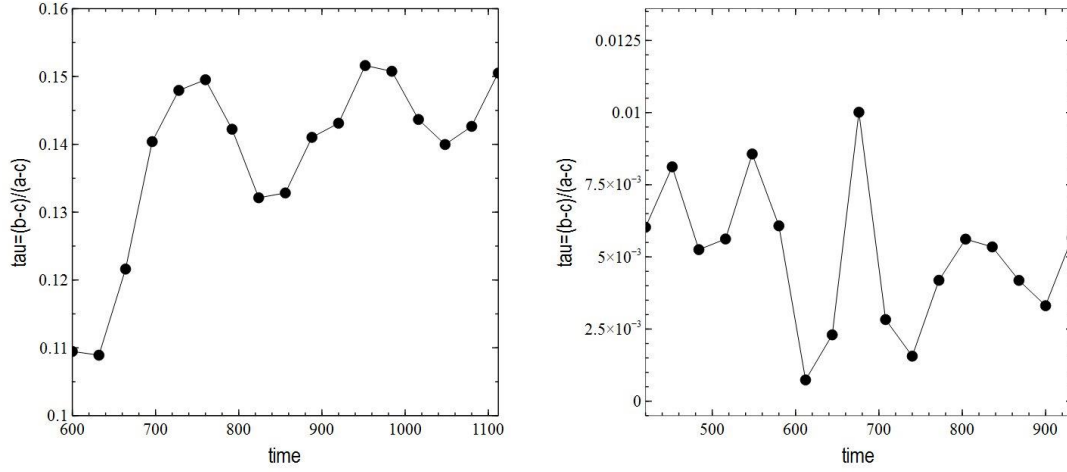


Fig. 3.13. Parámetro de triaxialidad (τ) como función del tiempo en los modelos 1A (izquierda) y 1B (derecha), calculado para los esferoides resultantes incluyendo el 80% de las partículas más ligadas en ambas configuraciones. El tiempo total de integración es $t=512$ ($85 t_{\text{cross}}$) en los dos modelos con las condiciones iniciales de la Tabla 3.7.

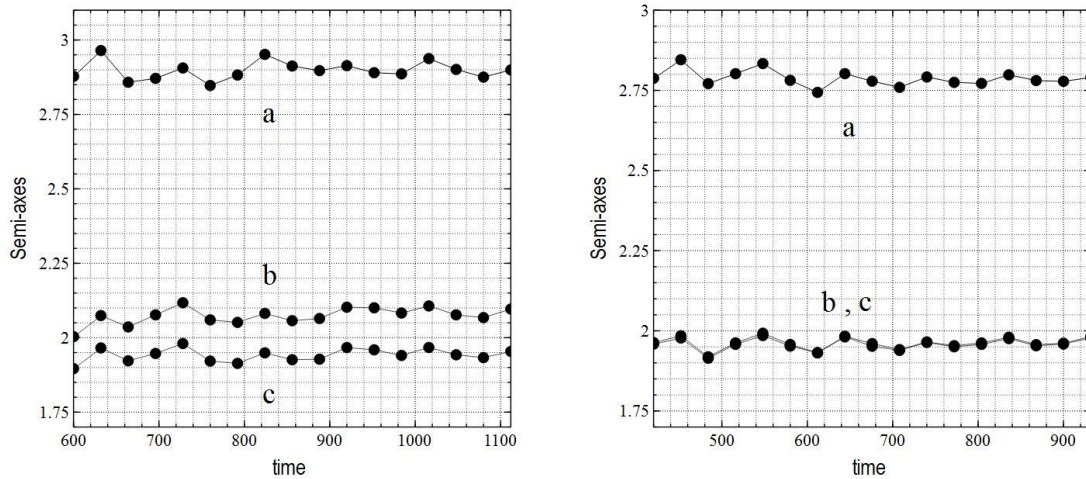


Fig. 3.14. Semiejes principales a , b , c como función del tiempo para los modelos 1A (izquierda) y 1B (derecha), calculados para los esferoides resultantes incluyendo el 80% de las partículas más ligadas en ambas configuraciones. El tiempo total de integración es $t=512$ ($85 t_{\text{cross}}$) en los dos modelos con las condiciones iniciales de la Tabla 3.7.

Dado que la curva de la Figura 3.13 con el parámetro de triaxialidad depende explícitamente de los semiejes a, b y c , ésta guarda naturalmente una correlación punto a punto en el tiempo con la Figura 3.14, donde cada semieje es graficado de forma independiente.

Habiendo comprobado la virialización y la constancia de la forma final de los esferoides, además de la conservación de energía total en nuestros sistemas, pasamos a analizar un criterio central que garantiza un ejercicio de extracción de órbitas confiable en nuestras configuraciones: la conservación de las energías de sus partículas individuales.

3.5.4 Conservación de energías de partículas individuales en los modelos 1A y 1B

Un sistema de partículas en equilibrio virial se caracteriza no sólo por conservar su energía mecánica total —es decir, por poseer esta primera integral de movimiento—, sino también por

conservar en teoría las energías individuales de todas sus partículas constituyentes (en la práctica, la granularidad del sistema y los errores de truncamiento y redondeo conspiran en contra de ello). Dar una respuesta a la pregunta de hasta qué punto las partículas individuales de nuestros sistemas conservan sus energías requiere, básicamente, la definición de un parámetro estadístico que nos permita calcular las variaciones en la energía de amarre de cada partícula en el intervalo de integración considerado.

Definimos así el error rms en las energías individuales de partículas en nuestros modelos sobre un intervalo de tiempo para cada partícula como

$$\left(\frac{\delta E_{rms}^{(i)}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{(N_j-1)} \sqrt{\sum_{j=2}^{N_j} (E_j^{(i)} - E_1^{(i)})^2} \right] \quad (3.8)$$

donde N_j es el número de subintervalos temporales considerados, Δt es el subintervalo temporal, E_j y E_1 son las energías j -ésima e inicial de la partícula, respectivamente. El error rms de energías individuales fue calculado para todas las partículas de los Modelos 1A y 1B a lo largo del intervalo completo de integración en cada caso, con $N_j = 16$ y $\Delta t = 32$ en ambos.

Las gráficas de $\log(\delta E_{rms}/\Delta t)$ versus energía inicial para cada una de las 10^6 partículas en cada caso se muestran en la Figura 3.15 (gráficas de “cuello de jirafa”, por el parecido de la distribución con el cuello del espigado mamífero africano). Estas muestran claramente que las partículas menos ligadas -las más remotas en ambas configuraciones- son las menos afectadas por el relajamiento colisional, y por lo tanto las que menores variaciones muestran en sus energías individuales a lo largo de sus órbitas, traduciéndose naturalmente en un menor error rms. Como veremos en la siguiente sección, estas partículas con variaciones mínimas en sus energías individuales como función del tiempo serán cruciales en la identificación de las órbitas más confiables durante el proceso de extracción.

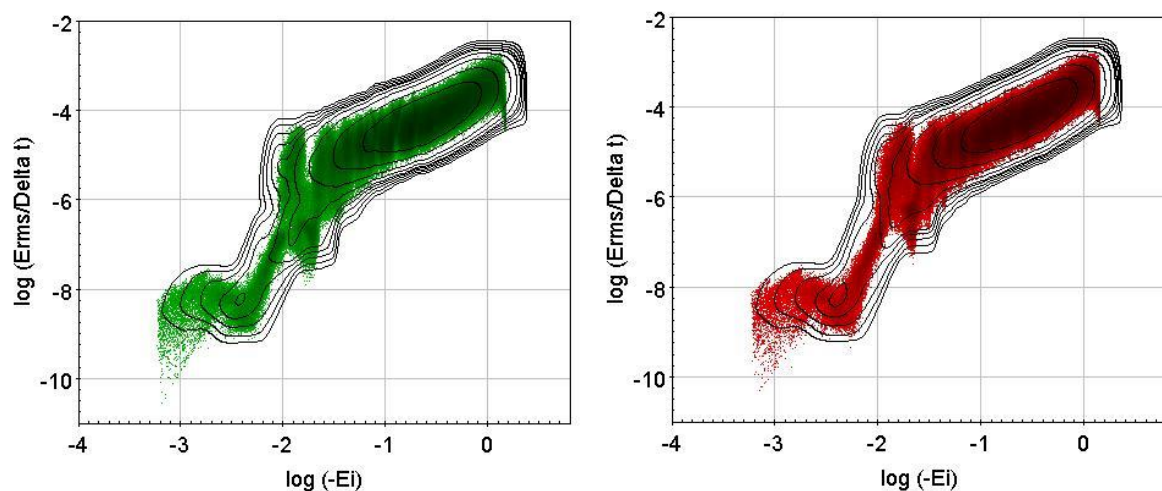


Fig. 3.15. Gráficas del error rms de energías de partículas individuales como función de energía de amarre inicial para el intervalo completo de integración en los modelos 1A (izquierda) y 1B (derecha). Las partículas con mayores energías de amarre (más negativas) y mayor error rms debido al relajamiento colisional se ubican en el rincón superior derecho, en la “cabeza” de las aquí llamadas gráficas de “cuello de jirafa”. Los contornos de isodensidad identifican la zona de mayor concentración de partículas en el “cuello de la jirafa”.

El hecho de que el error rms de las energías de partículas individuales sea distinto dependiendo de qué tan ligadas gravitacionalmente estén éstas al sistema, nos permite un esquema de diferenciación donde las órbitas más confiables de partículas corresponderán a aquellas que muestren el menor error rms en sus energías individuales, unido a la condición adicional de que tales partículas hayan cubierto un número suficiente de períodos orbitales para poder ser muestreadas y clasificadas con precisión.

Así, el camino hacia la determinación de la estructura orbital de nuestras configuraciones vendrá respaldada por los criterios establecidos desde el inicio de nuestras integraciones numéricas con GYRFALCON: en lo global, la conservación de la energía total y la virialización de nuestros modelos; en lo particular, la conservación de las energías individuales de sus partículas constituyentes. La siguiente sección analiza en detalle el proceso de extracción de órbitas basado en los criterios mencionados.

3.5.5 Extracción de órbitas en los modelos 1A y 1B

Las gráficas de “cuello de jirafa” de la sección anterior nos proveen información sobre la dependencia del error rms de las energías de partículas individuales como función de su energía de ligadura inicial, y con ello con un modo concreto de definir la calidad en la determinación del tipo de órbitas subyacentes en nuestros modelos. Es indispensable que las partículas cuyas órbitas buscamos determinar muestren los menores cambios en sus energías posibles, pues sólo así estaremos seguros que las colisiones con otras partículas -cercanas o lejanas- no son lo suficientemente importantes como para desviarlas de sus órbitas reales, es decir, del camino que seguirían en respuesta exclusiva al potencial suave y global generado por el conjunto total de partículas dentro del cual aquellas están inmersas.

Aunque los efectos de la colisionalidad de nuestros sistemas quedaron reducidos de principio con el número relativamente alto de partículas escogido en nuestras simulaciones de N -cuerpos (10^6), los centros de nuestros modelos donde la densidad estelar es mayor aumentan la posibilidad de encuentros con vecinos cercanos. El relajamiento colisional será por lo tanto más eficiente en partículas con energía de amarre alta, muy ligadas gravitacionalmente al sistema y cercanas a su centro. Estas partículas, no obstante, tienen la ventaja de poseer períodos orbitales cortos, y por ende, de poder completar muchos más de esos períodos durante un tiempo de integración determinado.

Un número alto, o por lo menos suficiente, de períodos orbitales cubiertos por nuestras partículas se vuelve un factor y requisito importante al momento de clasificar el tipo de órbita resultante. Un número excesivo de períodos cubiertos, por otro lado, traducido en un sobremuestreo de órbitas, puede ser tan poco confiable al momento de identificar con precisión el tipo de órbita como un submuestreo. Estos factores serían tomados muy en cuenta durante la aplicación del código clasificador TAXON, además del ya discutido en relación con la adecuada conservación de las energías de partículas individuales.

El primer paso hacia la determinación de las familias orbitales presentes en nuestros modelos 1A y 1B es la aplicación de un método eficiente de extracción de órbitas en nuestros sistemas en estado estacionario. Esto significa, concretamente, determinar las posiciones espaciales

(x, y, z) de partículas individuales como función del tiempo (t) a lo largo del intervalo completo de integración. Para esto hicimos uso del código extractor EXTRILLA, cuyas características han sido discutidas en la Sección 3.3.2 arriba. Nuestro código es capaz de extraer eficientemente 10^6 órbitas individuales en aproximadamente 50 horas de tiempo de CPU corriendo en los procesadores de la Nube de UTEP, es decir, a una velocidad de $\sim 20,000$ órbitas por hora, cada una muestreada con 4096 puntos uniformemente espaciados en el tiempo. Leyendo directamente del enorme archivo de datos de salida de GYRFALCON —con tamaño mínimo de 30 Gb— en formato snapshot una vez convertido a formato ASCII, EXTRILLA subdividió la información cinemática de cada modelo segmentando los datos en 40 subarchivos, cada uno conteniendo información de 25,000 órbitas individuales. Esta segmentación fue hecha sobre todo para permitirnos una mejor y más eficiente manipulación numérica de los datos.

Simultáneamente a este proceso y basados en nuestras gráficas de “cuello de jirafa” con los errores rms de las energías de partículas individuales, realizamos una subdivisión similar de los datos en 4 o 5 intervalos de error rms, desde las partículas con las mayores variaciones en sus energías individuales, hasta aquellas con energías individuales prácticamente constantes. De esta manera, logramos establecer un criterio de clasificación basado en qué tan bien las partículas, y cuántas de ellas, conservaban sus energías individuales a lo largo del intervalo completo de integración.

Enseguida, y ya con los 40 archivos conteniendo las órbitas de todas las partículas en nuestros sistemas, procedimos a rotar numéricamente cada uno de ellos basados en el tensor de inercia calculado en NEMO e incluyendo sólo el 80% de las partículas más ligadas (ver Sección 3.4.5 arriba). Recordemos que los datos de salida de GYRFALCON no vienen de origen orientados según los ejes principales del sistema, y que determinar la forma de los esferoides resultantes en nuestras simulaciones requirió precisamente el cálculo del tensor de inercia, con el cual los esferoides fueron rotados para hacerlos coincidir con dichos ejes. Es este mismo tensor de inercia el que usamos para rotar las posiciones (x, y, z) de todas las partículas como función del tiempo, ahora con el objetivo de determinar sus órbitas, las cuales deben tener las orientaciones correctas dentro del sistema para poder ser clasificadas adecuadamente.

La Figura 3.16 presenta una muestra de los datos de salida típicos de GYRFALCON una vez extraídas las posiciones como función del tiempo (x, y, z, t) del millón de partículas de cada modelo con EXTRILLA, así como los mismos datos después de aplicar la correspondiente rotación con el tensor de inercia. Las posiciones de tales partículas muestran claramente una variación suave con el tiempo, definiendo una órbita suave, dado el nivel de resolución y muestreo definido en la simulación por el paso de tiempo y frecuencia de salida de datos.

-0.0824712 1.05865 0.751073 600	-1.256048 -0.266084 -0.207834 600.000
18.2228 9.90571 9.69735 600	-1.192206 -0.280209 -0.156160 600.125
-0.0515289 0.450663 0.0513977 600	-1.124811 -0.292894 -0.103555 600.250
17.6523 -12.5141 -4.08054 600	-1.053609 -0.303809 -0.050193 600.375
0.450507 -0.650569 -0.626972 600	-0.978289 -0.312601 0.003655 600.500
-10.5883 11.8865 -17.3621 600	-0.898538 -0.318891 0.057582 600.625
-9.90425 7.19273 -8.6656 600	-0.814133 -0.322181 0.111046 600.750
0.0341235 0.0147158 0.0129774 600	-0.724809 -0.321955 0.163316 600.875
-8.61075 9.41009 -1.22023 600	-0.630385 -0.317648 0.213485 601.000
0.319793 -4.9373 -2.47379 600	-0.530888 -0.308613 0.260477 601.125
0.875983 0.24081 4.25282 600	-0.426558 -0.294236 0.302952 601.250
0.103364 0.0647229 0.225506 600	-0.317928 -0.273984 0.339346 601.375
1.59564 0.906006 0.375864 600	-0.205824 -0.247556 0.367998 601.500
-0.0417282 -0.0443498 -0.0694683 600	-0.091352 -0.214955 0.387446 601.625
-0.298569 1.83186 1.65688 600	0.024263 -0.176492 0.396410 601.750
7.71491 19.5775 -0.156511 600	0.139605 -0.132809 0.393934 601.875
0.222917 -0.014682 0.17095 600	0.253051 -0.084936 0.379551 602.000
0.372212 -11.3075 10.3185 600	0.362899 -0.034196 0.353521 602.125
-4.90652 -1.97192 -3.3654 600	0.467584 0.017820 0.316999 602.250
2.27744 18.6301 12.4216 600	0.565744 0.069677 0.272058 602.375
	0.656830 0.120315 0.220987 602.500
	0.740998 0.169080 0.165811 602.625
	0.818739 0.215585 0.108190 602.750
	0.890671 0.259654 0.049340 602.875
	0.957394 0.301311 -0.009882 603.000

Fig. 3.16. Izquierda: Muestra de datos de salida de posiciones como función del tiempo (x, y, z, t) para las primeras 20 partículas del sistema después de una corrida típica con GYRFALCON. El código arroja posiciones no rotadas de las 10^6 partículas a un tiempo dado ($t = 600$ en este ejemplo). Derecha: Primeros 25 datos de la órbita de la primera partícula del sistema después de rotarlo con el tensor de inercia y del proceso de extracción orbital con extrilla. Las posiciones (x, y, z) de la partícula como función del tiempo muestran cambios suaves y secuenciales, crecientes y decrecientes, indicativos de las variaciones temporales sinusoidales de cada coordenada en una órbita real.

3.5.6 Clasificación de órbitas en los modelos 1A y 1B

Con datos en mano de las órbitas de todas las partículas en nuestros modelos 1A y 1B, el siguiente reto consistió en poder clasificarlas con precisión. Para ello, y dado que nuestra meta era implementar un método confiable y eficiente para clasificar cientos de miles de órbitas individuales en un tiempo razonable, la opción natural en esta etapa de nuestra investigación fue el código TAXON de Carpintero y Aguilar (1998), cuyas características han sido descritas en la sección 3.3.3. El código está diseñado para determinar las componentes sinusoidales resultantes de las variaciones temporales de cada coordenada en la órbita, i.e. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, variaciones crecientes y decrecientes que a simple vista resultan claras en la órbita de la Figura 3.16 derecha.

La versión automatizada de TAXON fue corrida para obtener un archivo de salida con los tipos orbitales de cada una de las 10^6 partículas de cada modelo, repartidas en los 40 archivos mencionados conteniendo 25, 000 órbitas cada uno. La estructura y diseño del código imponen la condición de que el muestreo utilizado durante las integraciones numéricas con GYRFALCON arroje un número de puntos por órbita igual a 2^n . En particular, TAXON requiere óptimamente 4096 u 8192 (2^{12} o 2^{13}) puntos por órbita para realizar una clasificación confiable (Carpintero 2015, comunicación personal). En este trabajo, todas nuestras órbitas fueron muestreadas con 4096 puntos.

Además de esta primera condición existe un segundo criterio, y es que el número de períodos cubiertos por partícula debe estar acotado entre 80 y 300. Menos de 80 o más de 300 períodos cubiertos por partícula se traducen en un submuestreo o sobremuestreo de su órbita, lo que lleva a las incertidumbres correspondientes en el tipo orbital mismo, dimensionalidad, tipo y número de resonancias, etc. Así, la combinación de ambas condiciones implica que las órbitas más confiablemente clasificadas por TAXON en nuestros modelos están caracterizadas por un muestreo mínimo de ~ 14 y un máximo de ~ 50 puntos por período orbital. Con estas condiciones tomadas en cuenta, el código fue corrido y capaz de clasificar las 10^6 órbitas de los 40 archivos de datos en aproximadamente 180 horas de tiempo de CPU, equivalente a una velocidad de ~ 5500 órbitas por hora.

Un ejemplo del archivo de salida en TAXON con los datos orbitales de una muestra de partículas es el de la Figura 3.17, con información del tipo de órbita, frecuencias fundamentales y resonancias.

140	411	0	-1	1	0	0	0
351	300	0	0	0	0	0	0
221	311	0	-1	1	0	0	0
65	300	0	0	0	0	0	0
66	300	0	0	0	0	0	0
97	300	0	0	0	0	0	0
104	300	0	0	0	0	0	0
156	300	0	0	0	0	0	0
59	300	0	0	0	0	0	0
51	300	0	0	0	0	0	0
53	321	0	-1	1	7	-4	0
148	300	0	0	0	0	0	0
123	311	0	-1	1	0	0	0
245	300	0	0	0	0	0	0
126	300	0	0	0	0	0	0
89	300	0	0	0	0	0	0
56	400	0	0	0	0	0	0
108	311	0	-1	1	0	0	0
190	311	0	-1	1	0	0	0
55	300	0	0	0	0	0	0
87	411	0	-1	1	0	0	0
358	300	0	0	0	0	0	0
143	300	0	0	0	0	0	0
148	300	0	0	0	0	0	0
114	300	0	0	0	0	0	0

Fig. 3.17. Muestra de un archivo de salida en TAXON, con datos orbitales de 25 partículas individuales en nuestros sistemas. Las columnas de izquierda a derecha incluyen: 1) número de períodos orbitales muestreados por partícula, 2) código de clasificación orbital, 3), 4), 5), frecuencias fundamentales, 6), 7) y 8) resonancias. Una clasificación confiable en TAXON requiere un mínimo de 80 y un máximo de 300 períodos orbitales muestreados por partícula.

El proceso de clasificación orbital nos muestra que, dado el tiempo de integración de 85 tiempos de cruce, sólo alrededor del 16% de todas las partículas (10^6) en los modelos 1A y 1B tuvieron el tiempo suficiente para cubrir por lo menos 80 y no más de 300 períodos orbitales en dicho intervalo temporal. El 84% restante es una combinación de partículas a) cuyas órbitas menos ligadas poseen períodos particularmente largos, b) que han alcanzado de hecho la velocidad de escape para desligarse del sistema y c) con órbitas muy ligadas al sistema que han

completado más de 300 períodos orbitales durante el intervalo de integración en nuestras simulaciones. Al tomar en cuenta los errores rms de las energías de partículas individuales en las gráficas de “cuello de jirafa” y la subdivisión de estos errores en 5 intervalos, confirmamos que las partículas con las menores fluctuaciones en sus energías individuales eran aquellas donde $-4.5 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.0$. Errores mínimos de $\log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t \sim -4.5$ en energías individuales fueron entonces posibles en nuestros modelos 1A y 1B, pero no más pequeños, marcando así el límite de precisión de esta primera aproximación al ejercicio de clasificación orbital en nuestras configuraciones en equilibrio.

Una vez que este criterio de conservación de energías individuales de partículas fue incorporado a los otros dos para lograr una clasificación robusta de órbitas (número suficiente de puntos muestreados por órbita, 4096, y un mínimo de 80 y un máximo de 300 períodos orbitales cubiertos por cada partícula), terminamos con un número equivalente a 11,602 y 15,805 partículas en los modelos 1A y 1B (respectivamente) consistentes con dichos criterios. Estas poblaciones cumplían así con las tres restricciones impuestas arriba para una clasificación confiable en TAXON. La Figura 3.18 ilustra la región de la gráfica de “cuello de jirafa” conteniendo las partículas antes señaladas.

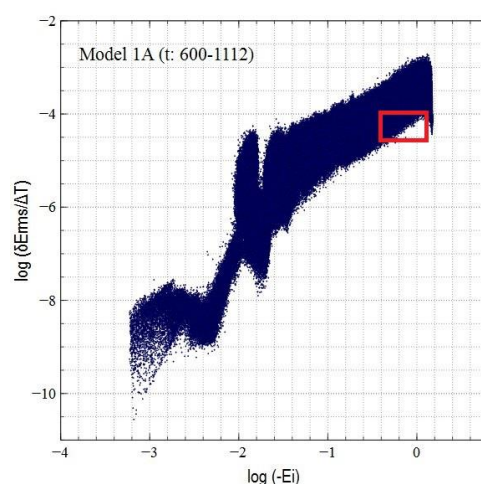


Fig 3.18. Región de la gráfica de “cuello de jirafa” con los errores rms de energías individuales ocupada por las 11,602 partículas del Modelo 1A, cuyas órbitas satisficieron los tres criterios de selección discutidos en el texto. Una región similar es ocupada en el Modelo 1B. Un intervalo de errores rms de $-4.5 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.0$ en las energías de partículas individuales representa el mínimo error alcanzable para un período de integración de $85 t_{\text{cross}}$ en los Modelos 1A and 1B.

Basados en estos resultados, nuestro análisis de las familias orbitales presentes en nuestros modelos está restringido al 1.1% y 1.5% (modelos 1A y 1B, respect.) de las poblaciones totales de partículas en tales modelos, subpoblaciones que por cierto cubren un amplio intervalo de energías de ligadura en nuestras galaxias simuladas.

La Tabla 3.8 presenta los resultados de la clasificación orbital en las subpoblaciones de 11,602 partículas (1A) y 15,805 partículas (1B) de los dos modelos que satisfacen las condiciones enumeradas

$$1) N_o = 4096 \quad 2) 80 < N_p < 300 \quad 3) -4.5 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.0$$

donde N_o : número de puntos (x, y, z) muestreados por órbita, N_p : número de períodos cubiertos por órbita, $\log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t$: logaritmo del error rms de energías individuales por partícula. Las primeras dos condiciones vienen impuestas por el código clasificador TAXON y la tercera como un criterio arbitrario de precisión basado en los mínimos errores rms posibles de energías individuales de partículas en este intervalo de integración.

Modelo	Tipo de órbita	No. de código (TAXON)	% del total de partículas selectas
1A	Tubo en X abierto	311	51 %
	Caja abierta	300	34%
	Caótica	411	5%
	Tubo en Z abierto	313	4%
	“Cajuela” abierta (boxlet)	310	3%
	Tubo en X delgado	211	3%
1B	Tubo en X abierto	311	75%
	Caja abierta	300	14%
	Caótica	411	5%
	Tubo en X delgado	211	4%
	“Cajuela” abierta (boxlet)	310	2%

Tabla 3.8. Clasificación orbital en los modelos 1A y 1B

Los histogramas correspondientes a la Tabla 3.8 se muestran en la Figura 3.19, donde graficamos el número de partículas por tipo orbital como función de la energía de ligadura. La preponderancia de las órbitas de tubo alrededor del eje mayor (X) del esferoide y de las órbitas de caja abierta es obvia en ambos modelos, y aunque sus abundancias relativas cambian entre ellos, los tubos abiertos en x dominan la estructura orbital con al menos 50% del número total de partículas, cuyas órbitas han sido determinadas con un alto grado de confiabilidad una vez extraídas de nuestras simulaciones “vivas” de N -cuerpos. Las órbitas caóticas (irregulares) contribuyen aquí con el 5% de la población total de partículas selectas en nuestros modelos.

Igualmente, las proyecciones a los planos XY , XZ y YZ de una muestra de los tipos más importantes de órbitas en nuestros sistemas modelados se ilustran en la Figura 3.20.

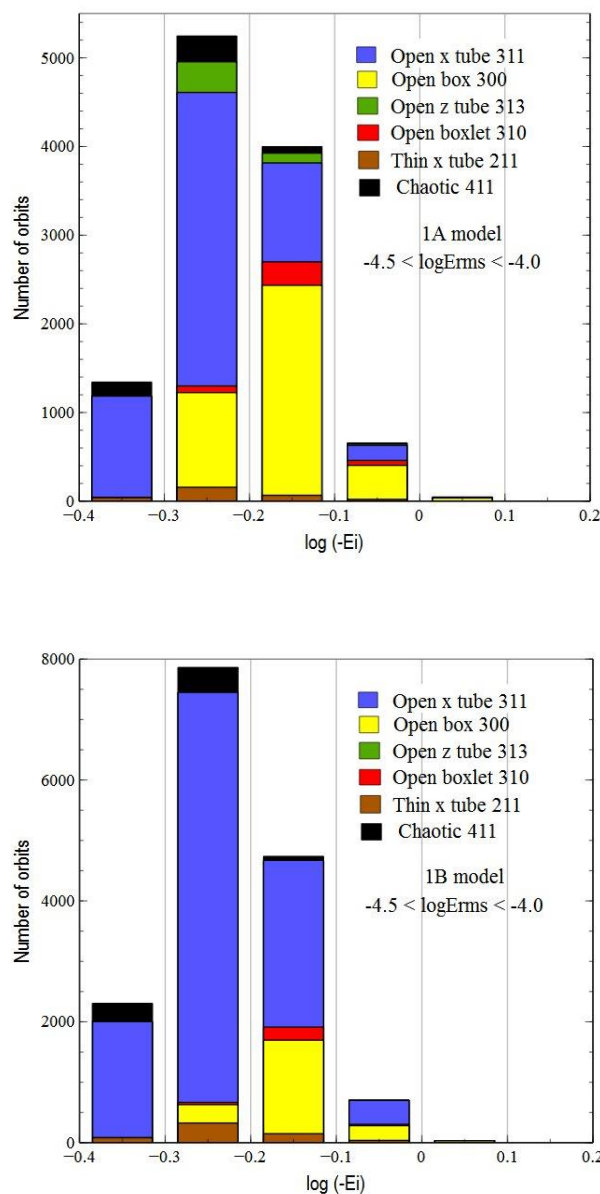


Fig. 3.19. Histogramas de las poblaciones de órbitas de partículas individuales como función de su energía inicial de ligadura con $-4.5 < \log \delta E_{rms}/\Delta t < -4.0$ en los modelos 1A (arriba) y 1B (abajo). Las partículas más ligadas están a la derecha sobre el eje horizontal. La abundancia y dominio de las órbitas de tubo en X y de las cajas abiertas es clara. Las órbitas caóticas tienen una contribución al total menor al 10%. La estadística fue hecha sobre un total de 11,602 (modelo 1A) y 15,805 (modelo 1B) partículas selectas que satisficieron los criterios discutidos en el texto.

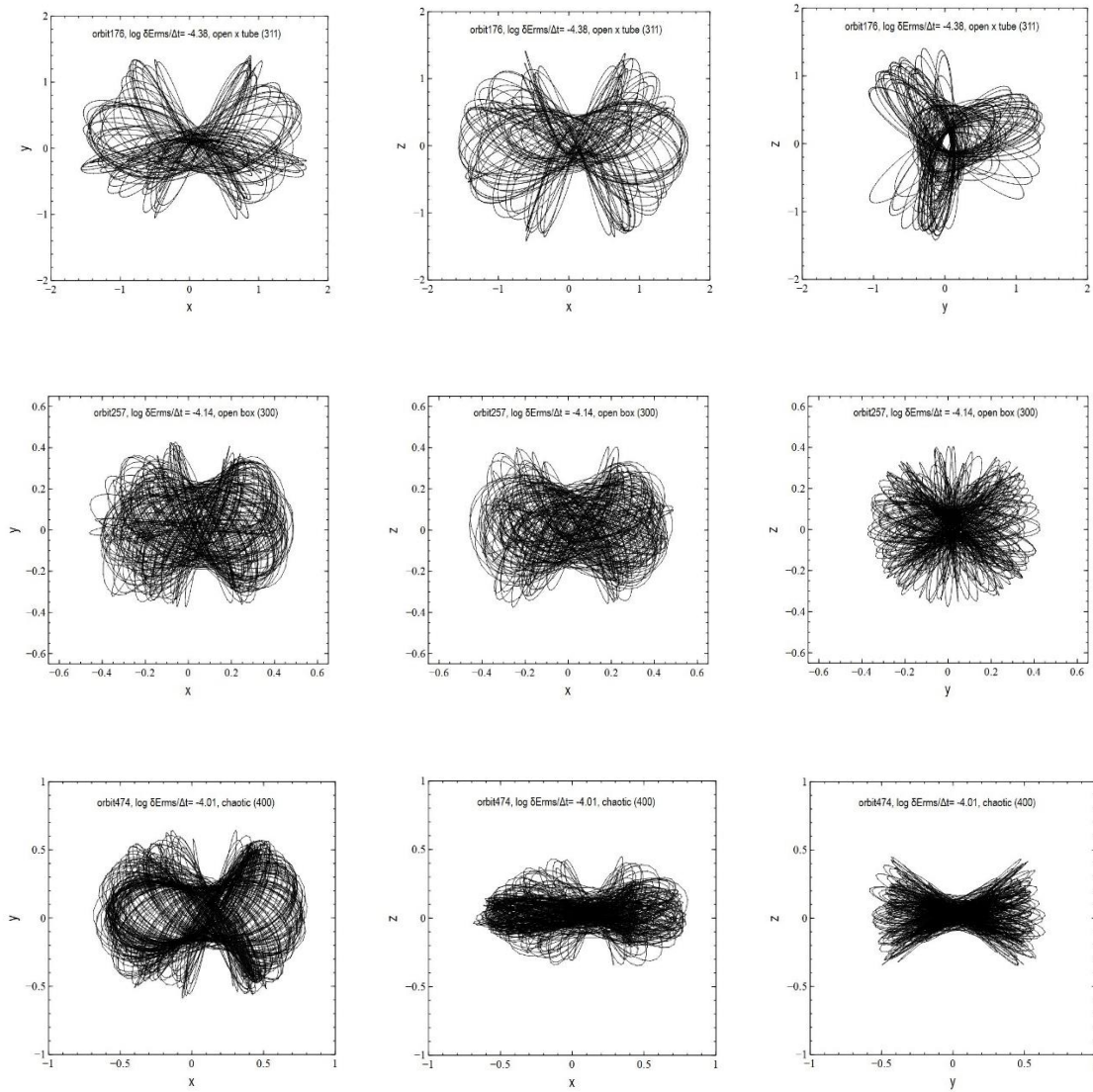


Fig. 3.20. Los tres tipos más abundantes de órbitas en los modelos 1A y 1B a través de sus proyecciones, de izquierda a derecha, a los planos XY , XZ y YZ . Arriba: órbita tipo tubo abierto alrededor del eje X del esferoide, la variedad más común en nuestras configuraciones cuasi prolatas y prolatas. Enmedio: órbita de caja abierta, donde la partícula pasa arbitrariamente cerca del centro del sistema. Abajo: una órbita caótica, mucho menos abundante en nuestros sistemas que las primeras dos categorías mostradas arriba.

3.5.7 Modelos extendidos 2A y 2B

Dada la excelente conservación de energía total en nuestros modelos iniciales 1A y 1B, y motivados por la observación de que las gráficas de errores rms de energías individuales de

partículas evidencian que una gran población de ellas sufren cambios verdaderamente ínfimos en sus energías en el intervalo de integración considerado (partículas localizadas en el cuadrante inferior izquierdo de las gráficas de “cuello de jirafa”), decidimos realizar un par de simulaciones de N -cuerpos más a manera de extensión de las efectuadas hasta ahora.

Nuestra meta fue verificar una hipótesis de trabajo simple: que dado un tiempo de integración suficientemente amplio, quizá doble o cuádruplemente más largo que el de los modelos 1A y 1B, cierta subpoblación de partículas menos ligadas, con períodos más largos y menos propensas al relajamiento colisional, continuarían conservando sus energías individuales tan bien como lo habían hecho en nuestros primeros dos modelos, con la ventaja que ahora tendrían oportunidad de cubrir al menos el doble de períodos orbitales que en la etapa anterior, abriendo así la posibilidad de obtener una submuestra de alta precisión donde las partículas conservan sus energías con un error mínimo al mismo tiempo que logran cubrir el suficiente número de períodos orbitales para poder ser clasificadas adecuadamente con TAXON.

La estrategia planteada, esto es, duplicar o cuádruplicar el tiempo de integración con GYRFALCON, de ninguna manera garantizaba el grado de precisión en la conservación de la energía total del sistema logrado en la etapa previa de este proyecto (error fraccional de tan sólo varias veces 10^{-7} en nuestro mejor modelo), pero sugería la atractiva posibilidad de “captar” nuevas partículas en el sistema con un mejor nivel de conservación de sus energías individuales (i.e., con $\log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.5$) y número suficiente de períodos orbitales cubiertos —mínimo 80— para una clasificación robusta.

La constancia en el valor de la energía total de los sistemas siempre ha sido un requisito fundamental en nuestros experimentos numéricos, sin embargo, puesto que nuestra prioridad va relacionada con la búsqueda de una mejor conservación de energías individuales de partículas para demostrar la confiabilidad de la extracción de órbitas directamente de simulaciones “vivas” de N -cuerpos, el reto de realizar corridas al menos doblemente más largas bien valía la pena, siempre y cuando el error fraccional en la energía total del sistema se mantuviera menor a $\sim 10^{-4}$ durante nuestras integraciones.

Con tal objetivo, tomamos el último snapshot de nuestros modelos 1A (a $t = 1112$) y 1B (a $t = 932$) como las condiciones iniciales de dos nuevas configuraciones de partículas con las que realizaríamos una nueva simulación numérica con un tiempo de integración equivalente a $170 t_{\text{cross}}$. Estos serían nuestros modelos 2A y 2B, extensiones directas de 1A y 1B, donde usaríamos exactamente los mismos parámetros de las simulaciones de N -cuerpos realizadas con los anteriores modelos (i.e., con los mismos ε , θ y Δt).

El tiempo de CPU necesario para completar esta segunda dupla de simulaciones sería por lo tanto del orden de dos meses por corrida individual, fragmentada en cuatro subintervalos, con el ya bien conocido propósito práctico de facilitar lo más posible la manipulación de los enormes archivos de datos de salida en estos casos. La Tabla 3.9 presenta las condiciones iniciales y parámetros utilizados durante la integración de los modelos 2A y 2B.

Modelo	No. partículas	$2T/ W $	E_{total}	ε_{op}	θ_{op}
2A	10^6	0.9968	-0.0999411814	0.038	0.204
2B	10^6	1.0020	-0.0998762765	0.040	0.200

Tabla 3.9. Parámetros iniciales durante la integración de los Modelos 2A y 2B.

Asimismo, en la Figura 3.21 la geometría de los modelos se muestra al inicio y al final de cada una de las respectivas simulaciones, donde las configuraciones de 10^6 partículas dan clara evidencia de su forma final y grado de prolaticidad a través de la ya usual proyección al plano XZ , sobre la cual tal elongación es máxima y más evidente. Hay que señalar que en los modelos originales, el 1A es ligeramente más triaxial y elongado que el modelo 1B, el cual posee forma más francamente prolata y ligeramente menos elongada. Calculamos también las variaciones de los semiejes principales a , b , c de los nuevos modelos en el tiempo, las cuales presentamos en la misma Figura 3.21. Estas dan fé igualmente de que el potencial gravitacional ha dejado de fluctuar en el tiempo en ambos ensambles de partículas. Las formas cuasi prolata y prolata

finales de los esferoides se conservan con la misma proporción de ejes obtenida en los modelos 1A y 1B.

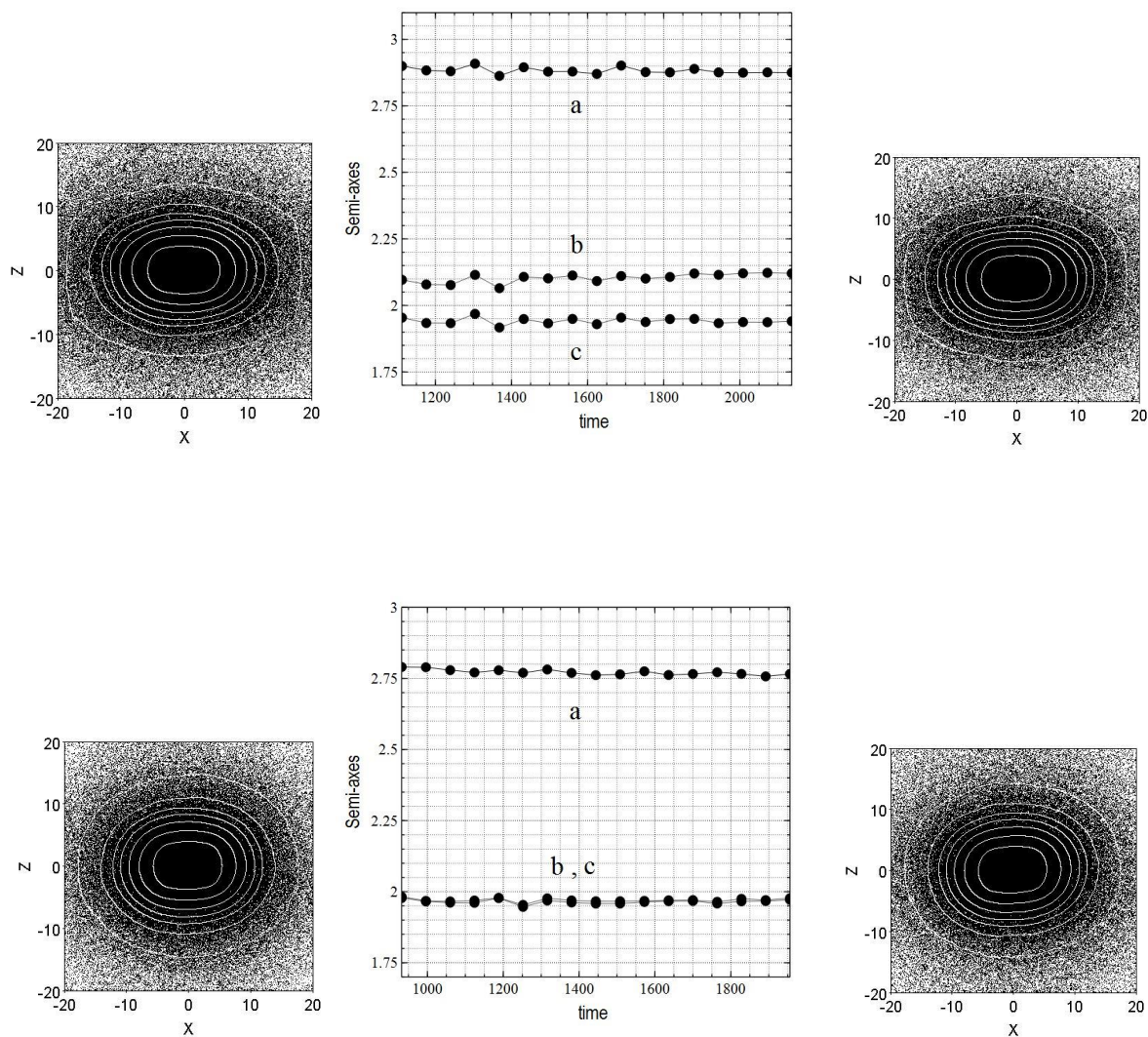


Fig. 3.21. Proyecciones al plano XZ de los modelos 2A (arriba) y 2B (abajo) al inicio y final del período de integración de $170 t_{\text{cross}}$. Las formas cuasi prolata y prolata finales y constantes de los esferoides virializados es evidente, lo que se confirma con las respectivas gráficas de los semiejes principales a , b , c como función del tiempo en ambos casos (entre imágenes), incluyendo el 80% de las partículas más ligadas. La constancia de semiejes implica una razón constante entre ellos y por lo tanto una prolatividad constante en ambas configuraciones.

Las gráficas que confirman el muy buen nivel de conservación de parámetros globales en los modelos 2A y 2B se muestran a continuación. La Figura 3.22 presenta las variaciones del cociente virial como función del tiempo durante el intervalo completo de integración en el modelo 2A (t : 1112-2136) y 2B (t : 932-1956), las cuales en promedio son menores a 0.5%, indicativo de una completa virialización. Por otro lado, la energía total de los sistemas en función del tiempo de la Figura 3.23, como habíamos anticipado para una integración doblemente prolongada, no muestra por ejemplo el excepcional nivel de constancia del modelo 1A, que en el modelo 2A adquiere un error fraccional de $E_{fe} = 2.6 \times 10^{-5}$ y de $E_{fe} = 2.4 \times 10^{-5}$ en el 2B (justificables de las curvas crecientes en los dos modelos en esa misma figura). Estos errores son aun así perfectamente aceptables para los propósitos de este proyecto, pues como dijimos nuestra prioridad se enfoca en una óptima conservación de las energías individuales de cada partícula del sistema.

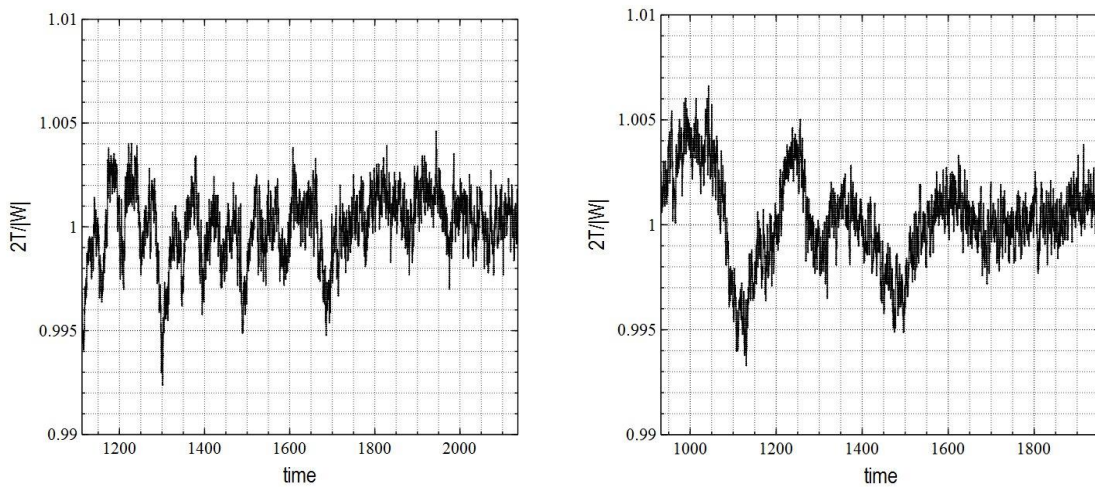


Fig. 3.22. Cociente virial como función del tiempo durante el intervalo completo de integración de los modelos 2A (t : 1112-2136, izquierda) y 2B (t : 932-1956, derecha), equivalente a $170 t_{\text{cross}}$. El cociente virial evidencia variaciones en promedio menores a 0.5%, muestra clara de que las configuraciones alcanzaron plenamente el estado estacionario.

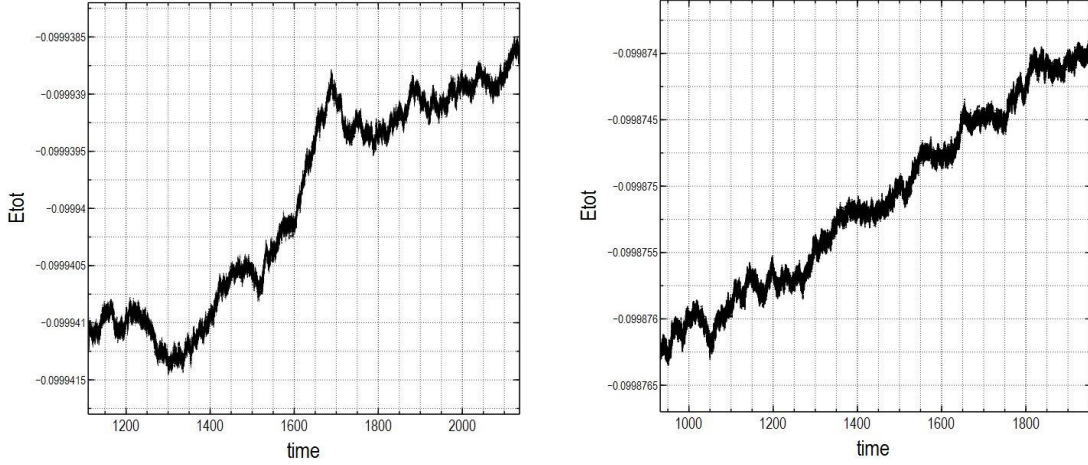


Fig. 3.23. Energía total como función del tiempo en los modelos 2A (izquierda) y 2B (derecha) para el intervalo completo de integración de $170 t_{\text{cross}}$. Con el doble de tiempo de integración de los modelos 1A y 1B originales, la energía total muestra un aumento ínfimo en su valor inicial traducido en un error fraccional en energía de $\sim 2\text{-}3 \times 10^{-5}$ en ambos modelos, aceptable para el análisis del comportamiento de las energías de partículas individuales.

Los modelos 2A y 2B cumplieron así las expectativas iniciales cuando, duplicando el tiempo de integración, los sistemas probaron alcanzar un estado altamente estable de partículas en equilibrio virial y forma final constante con un muy buen nivel de conservación en su energía total. Nos restaba solamente comprobar que el objetivo principal se había logrado; es decir, captar una subpoblación de partículas con un nivel óptimo de conservación en sus energías individuales que también vinieran acompañadas con un número suficientemente alto de períodos orbitales cubiertos para su correcta clasificación.

La verificación de haber podido incorporar a nuestra clasificación orbital una subpoblación de partículas con un menor error en la conservación de sus energías individuales, menor en relación con la muestra de órbitas en los modelos 1A y 1B, vino en forma de un ensamble de partículas cuyo error rms en energías individuales alcanzó el intervalo

$$-5.0 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.5.$$

Después del cálculo de este error, realizamos la correspondiente clasificación orbital con Taxon para estimar el número y tipo de órbitas que cumplieran con el segundo criterio de selección discutido anteriormente (ver Sección 3.5.6), i.e., que las partículas hubieran cubierto un mínimo de 80 y un máximo de 300 períodos por órbita. Recordemos que el primer requisito quedó satisfecho para todas nuestras integraciones al establecer desde un principio un número constante de 4096 puntos muestreados por órbita en cada corrida.

Así, habiendo satisfecho los tres criterios establecidos de selección de órbitas, nuestra estadística arrojó 5493 partículas en el modelo 2A y 7734 en el modelo 2B con $-5.0 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.5$, equivalente a 0.55% y 0.77% respectivamente de las poblaciones totales en ambos sistema (10^6). La Figura 3.24 señala la región de la gráfica de “cuello de jirafa” correspondiente conteniendo las partículas mencionadas.

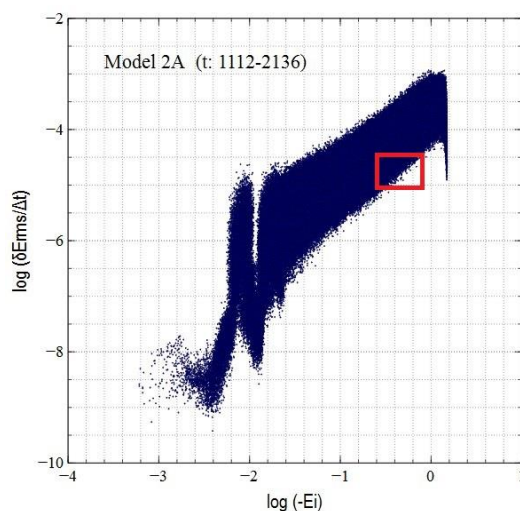


Fig. 3.24. Región de la gráfica de “cuello de jirafa” con los errores rms de energías individuales ocupada por las 5493 partículas del Modelo 2A, cuyas órbitas satisficieron los tres criterios de selección discutidos en el texto. Una región similar es ocupada en el Modelo 2B. Un intervalo de errores rms de $-5.0 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.5$ en las energías de partículas individuales representa el mínimo error alcanzable para un período de integración de $170 t_{\text{cross}}$ en los Modelos 2A and 2B.

Estos reducidos porcentajes, sin embargo, aglutinan una muestra de partículas en un intervalo de energías de amarre cuyos tipos orbitales han sido determinados con un alto nivel de precisión, hasta tres veces mayor que el logrado en los modelos 1A y 1B, al haber avanzado un intervalo de 0.5 unidades en el logaritmo del error rms de energías de partículas individuales en nuestros modelos extendidos. Dichos tipos orbitales y sus abundancias relativas se muestran en la Tabla 3.10.

Modelo	Tipo de órbita	No. de código (TAXON)	% del total de partículas selectas
2A	Caja abierta	300	43 %
	Tubo en X abierto	311	37%
	Tubo en Z abierto	313	9%
	Caótica	411	6%
	Caótica	400	3%
	“Cajuela” abierta (boxlet)	310	2%
2B	Tubo en X abierto	311	73%
	Caja abierta	300	17%
	Caótica	411	8%
	Tubo en Z abierto	313	< 1%
	Caótica	400	< 1%
	“Cajuela” abierta (boxlet)	310	1%

Tabla 3.10. Clasificación orbital en los modelos 2A y 2B.

Similarmente a los modelos 1A y 1B, los modelos extendidos 2A y 2B señalan una preponderancia de órbitas de caja abierta y tubos abiertos en x, ahora con un ligero dominio de las de caja en el 2A, representando el 43% del total de la muestra de 5493 partículas selectas. Por su lado, las órbitas de tubo en x son categóricamente las más abundantes en el modelo 2B, representando el 73% de una muestra de 7734 partículas selectas.

Hay que hacer notar que las dos variantes de órbitas caóticas identificadas por TAXON representan un 9% del total de la muestra en el modelo 2A, cantidad comparable a la de los tubos abiertos en z. En el modelo 2B, un porcentaje similar hace a las órbitas caóticas la tercera población más abundante. La Figura 3.25 presenta los histogramas correspondientes a la Tabla 3.10, donde graficamos el número de partículas por tipo orbital como función de la energía de ligadura en ambos modelos.

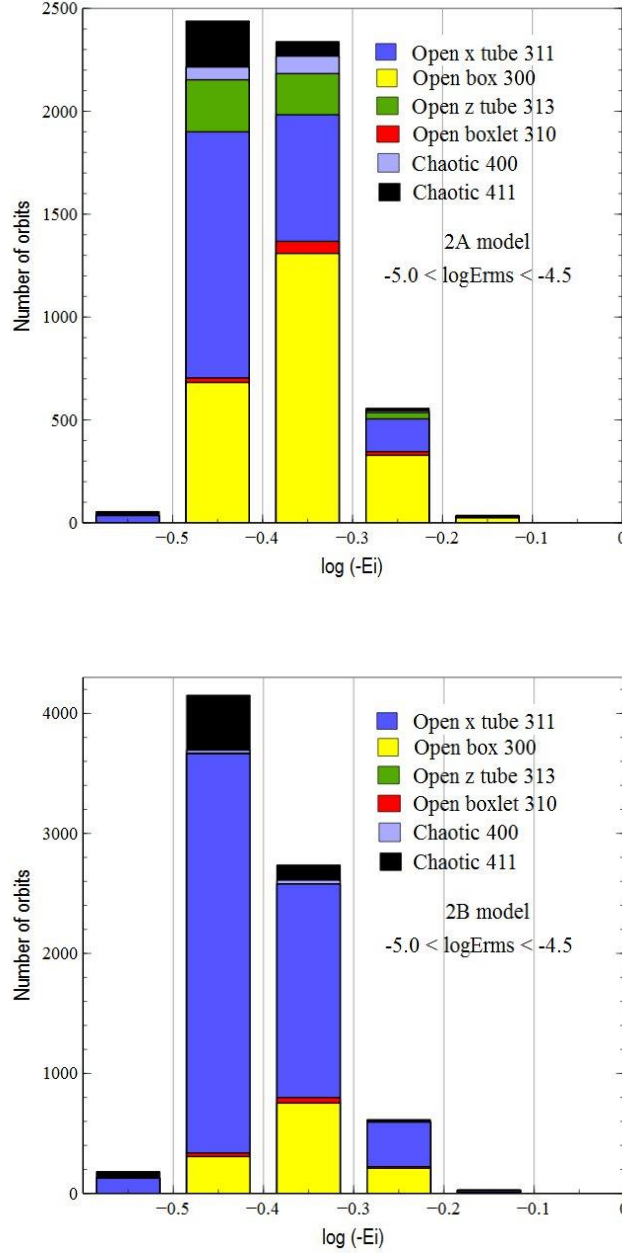


Fig. 3.25. Histogramas de las poblaciones de órbitas de partículas individuales como función de su energía de ligadura con $-5.0 < \log \delta E_{rms}/\Delta t < -4.5$ en los modelos 2A (arriba) y 2B (abajo). Las partículas más ligadas están a la derecha sobre el eje horizontal. Las cajas abiertas y los tubos abiertos en X dominan la muestra. Las órbitas caóticas tienen una contribución al total menor al 10%, pero comparable a la de los tubos abiertos en Z en el modelo 2A, desapareciendo prácticamente estos últimos en el modelo 2B. La estadística fue hecha sobre un total de 5493 (modelo 2A) y 7734 (modelo 2B) partículas que satisficieron los criterios discutidos en el texto.

Una manera directa de verificar el buen nivel de conservación de las energías individuales de partículas en nuestras simulaciones, además de las ya conocidas gráficas de su error rms como función de la energía de amarre (distribuciones de “cuello de jirafa”), es una gráfica de las fluctuaciones de dichas energías individuales como función del tiempo, a lo largo de todo el intervalo de integración en el modelo 2A (t : 1112-2136). Tal gráfica se presenta en la Figura 3.26 para una muestra de partículas en un intervalo arbitrario de energías.

Las partículas del Modelo 2A, cuyas energías se muestran en las partes superior e inferior del diagrama 3.26, fueron escogidas al azar de tal manera que sólo estuvieran acotadas dentro de dicho intervalo de energías. Aunque el característico “random walk” que describe las variaciones aleatorias de tales energías en el tiempo —por tratarse de un proceso difusivo— es claro para las partículas más ligadas (región inferior del diagrama con $E < -0.6$) y por lo tanto, más expuestas a interacciones con partículas vecinas, aquellas menos ligadas gravitacionalmente ($E > -0.2$) están mucho menos sujetas a dichos encuentros, por lo que sus energías de amarre individuales tienden a conservar su valor inicial.

En la Figura 3.26, tales partículas muy poco ligadas definen órbitas a lo largo de las cuales la energía de amarre es prácticamente constante. Sin embargo y desafortunadamente, la mayoría de éstas se encuentran tan lejos del centro del sistema que no han podido completar un número mínimo de períodos orbitales para poder ser muestreadas y clasificadas de una manera confiable, aun en la más larga de nuestras corrida por $340 t_{\text{cross}}$ (ver Modelo 4A más adelante). Entre estos dos extremos, sin embargo, la región media del diagrama centrada en $E \sim -0.4$ es ocupada por una submuestra de las 5493 partículas selectas cuyos errores rms de energías individuales se ubican en el intervalo $-5.0 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.5$. Nótese los pequeños errores logrados en la conservación de energías individuales de tal muestra de partículas, justificados gráficamente por la constancia de sus trayectorias en la Figura 3.26.

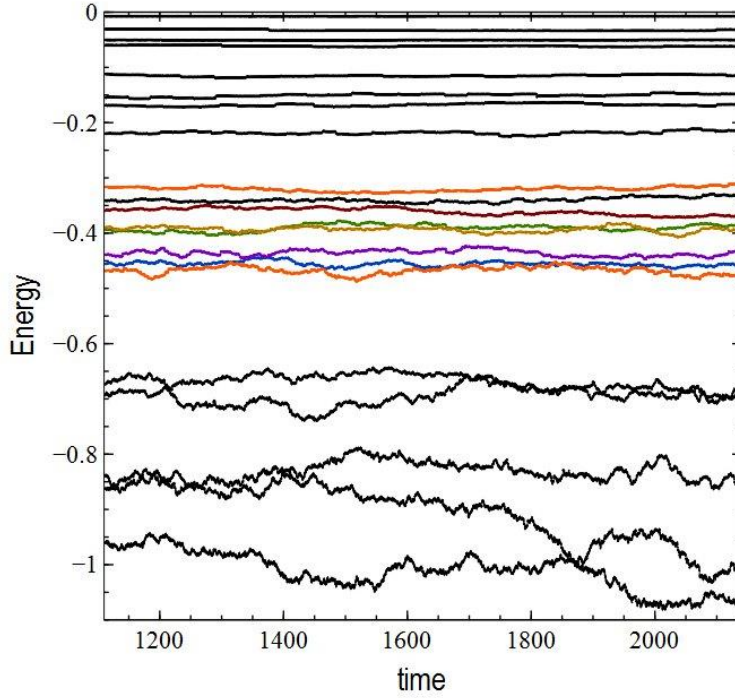


Fig. 3.26. Energías de partículas individuales como función del tiempo para una muestra de 21 partículas del modelo 2A en un intervalo arbitrario de energías. Las partículas más ligadas (abajo) están sujetas a un mayor relajamiento colisional debido a encuentros de dos cuerpos y sus energías fluctúan siguiendo el típico camino aleatorio (“random walk”) de un proceso de difusión. Las partículas menos ligadas (arriba) se ven menos afectadas por este fenómeno y sus energías de amarre permanecen prácticamente constantes si $E_o \geq -0.2$ en esta muestra. Una submuestra de las 5493 órbitas selectas y clasificadas del modelo 2A cuyos errores rms en energía individual yacen en el intervalo $-5.0 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.5$, también se muestran como comparación al centro de la gráfica ($-0.5 < E < -0.3$). El modelo 2A fue integrado usando el par (ϵ, θ) óptimo que minimiza el error fraccional en energía total del sistema.

A manera de comparación, la Figura 3.27 muestra las fluctuaciones en las energías individuales versus tiempo para una muestra de 10 partículas en una simulación similar en GYRFALCON de una esfera Plummer con 10^6 partículas. El tiempo de integración es $200 t_{\text{cross}}$, comparable al de nuestro Modelo 2A ($170 t_{\text{cross}}$). Las trayectorias de partículas individuales en ambas gráficas muestran de hecho el camino aleatorio esperado, el cual es por cierto más evidente en las partículas más ligadas del sistema (gráfica izquierda). Debe enfatizarse, sin embargo, que esta simulación no incorpora los parámetros óptimos que minimizan los errores en la conservación de la energía total del sistema.

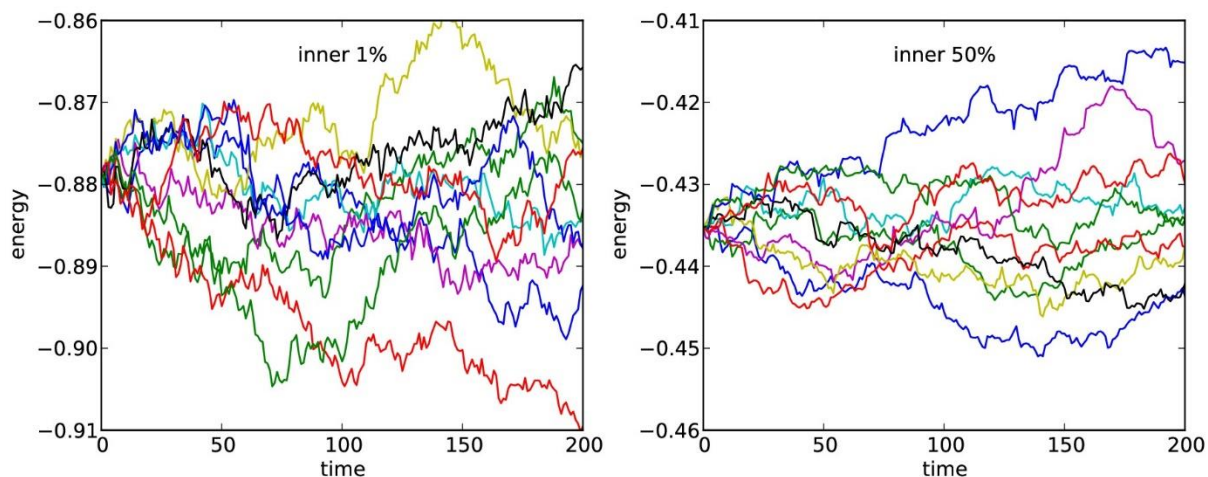


Fig. 3.27. Energías individuales como función del tiempo de una muestra de 10 partículas en una simulación similar con GYRFALCON de una esfera Plummer con 10^6 partículas. La integración por $200 t_{\text{cross}}$ no incluye los parámetros óptimos de ε y θ que minimizan el error fraccional en energía total. Las curvas muestran el camino aleatorio (“random walk”) esperado en poblaciones de partículas sujetas al relajamiento colisional. Cortesía de Eugene Vasiliev (2016, comunicación personal).

3.5.8 El modelo 4A

La misma motivación que nos llevó a explorar dos extensiones temporales directas de nuestros modelos originales 1A y 1B, ahora nos guiaría en un último experimento donde haríamos un esfuerzo por llevar al límite el uso de GYRFALCON como código integrador. Este nuevo ejercicio, donde buscaríamos avanzar un intervalo de -0.5 unidades más en el error rms de energías de partículas individuales respecto al modelo 2A, nos tomaría cuatro veces el tiempo de integración de nuestros primeros modelos.

El modelo 4A, extensión temporal directa de los modelos 1A y 2A, implicaría un tiempo de integración cuatro veces más largo que el original 1A; es decir, equivalente a $340 t_{\text{cross}}$ o ~ 50 días de tiempo de CPU en la Nube de UTEP. Este modelo, sin embargo, no se construiría como un modelo independiente corrido a partir de $t = 0$; por el contrario, de hecho haríamos uso de los modelos 1A y 2A más una integración adicional y contigua al modelo 2A (llamada aquí modelo 1A.2) corrida por $85 t_{\text{cross}}$ más para lograr el mencionado tiempo total de $340 t_{\text{cross}}$. Fusionar estas tres simulaciones parciales en una total, es decir el modelo 4A, fue posible por

el carácter consecutivo y lineal de las mismas, donde las condiciones finales de un modelo representan las condiciones iniciales de su consecutivo en el tiempo. De esta manera

$$\text{Modelo 4A} = \text{Modelo 1A} + \text{Modelo 2A} + \text{Modelo 1A.2}$$

Esta estrategia de suma lineal de simulaciones parciales fue motivada principalmente por limitaciones de tiempo, pues simplemente una nueva integración completa e independiente por $340 t_{\text{cross}}$ resultaba demasiado larga y difícil de lograr en la etapa final de este trabajo de investigación. Nuestra meta era capturar una nueva subpoblación de partículas que, dado un tiempo suficientemente largo de integración, pudieran haber completado un buen número de períodos orbitales y aun así conservado sus energías individuales óptimamente de tal manera que, para una clasificación robusta de sus órbitas, satisficieran $-5.5 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -5.0$.

Un límite realista de $\log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t \sim -5.5$ en el error rms de las energías de partículas individuales, accesible a nuestras simulaciones de N -cuerpos, empezó a ser claro para nosotros al término de la integración del modelo 2A, hecho que resultó obvio una vez concluido el modelo 4A. Efectivamente, aunque un buen número de partículas débilmente ligadas gravitacionalmente llegan a alcanzar errores ínfimos del orden de 10^{-9} en sus energías individuales en las gráficas de “cuello de jirafa”, tales partículas poseen períodos orbitales tan largos que a lo más sólo llegan a completar un arco de órbita alrededor del sistema durante el tiempo de integración dado. Algunas de esas partículas incluso han alcanzado la velocidad de escape o están a punto de hacerlo.

Ante estos resultados, creemos que el modelo 4A es una buena manera de representar los límites técnicos de una simulación de N -cuerpos con los objetivos particulares de esta tesis por medio de un código de árbol de alta precisión como lo es GYRFALCON.

En la Tabla 3.11, presentamos la estadística de las poblaciones de órbitas subyacentes al modelo 4A obtenidas con Taxon, basada en un total de 1486 partículas que satisficieron los tres criterios de selección impuestos y discutidos en este trabajo. Asimismo, la Figura 3.28

incluye los histogramas correspondientes a esta tabla. Estos indican que las órbitas de caja siguen permeando la distribución, siendo los tubos abiertos en X la mitad de abundantes que estas. El porcentaje de órbitas caóticas aumenta, pero no alcanza el 20% del total de la población.

Modelo	Tipo de órbita	No. de código (TAXON)	% del total de partículas selectas
4A	Caja abierta	300	43%
	Tubo en X abierto	311	21%
	Tubo en Z abierto	313	17%
	Caótica	400	16%
	Caótica	411	2%

Tabla 3.11. Clasificación orbital en el Modelo 4A

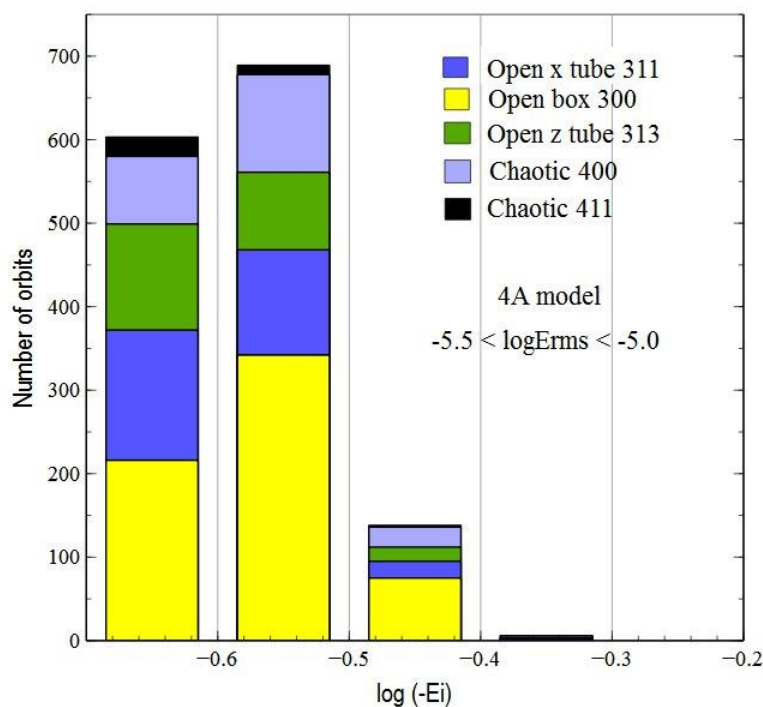


Fig. 3.28. Histograma de las poblaciones de órbitas de partículas individuales como función de su energía de ligadura con $-5.5 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -5.0$ en el modelo 4A. Las partículas más ligadas están a la derecha sobre el eje horizontal. Las cajas abiertas dominan la muestra, seguidas por los tubos abiertos en X . Las órbitas caóticas y los tubos abiertos en Z tienen contribuciones comparables entre sí al total ($< 20\%$ cada una). La estadística fue hecha sobre un total de 1486 partículas que satisficieron los criterios discutidos en el texto.

La presente investigación hizo uso extensivo de los paquetes de graficación científica VEUSZ de Jeremy Sanders y TOPCAT de Mark Taylor.

Capítulo 4 Conclusiones

Aunque significativos esfuerzos se han invertido en el entendimiento de los colapsos fríos no colisionales a través de simulaciones de N -cuerpos, poco se ha hecho por explorar el problema de extraer órbitas individuales de partículas *directamente* de las configuraciones de estado estacionario resultado de tales experimentos numéricos. Fundamentalmente, esto es debido a que la colisionalidad y granularidad intrínsecas a una simulación numérica impiden identificar las trayectorias de partículas obtenidas en la simulación con sus órbitas reales, dada la dispersión introducida por colisiones. Hoy en día, sin embargo, los códigos de árbol de alta precisión como GYRFALCON presentan la prometedora posibilidad de hacer este proceso de extracción orbital *in situ* posible si N es suficientemente grande bajo condiciones iniciales y de configuración óptimas.

1) Nuestras simulaciones numéricas siguieron un par de colapsos fríos ($(2T/|W|)_0 < 0.1$) de una distribución cuspidal de masa (esfera Hernquist fuera de equilibrio), en un escenario óptimo donde el efecto de las colisiones fue reducido a un mínimo, las cuales produjeron dos distribuciones relajadas de partículas altamente prolatas con una excelente conservación de energía total y un amplio intervalo de errores rms en la conservación de energías individuales. Habiendo alcanzado un estado de equilibrio, los cambios en las energías individuales de tales partículas son debido sólo al relajamiento por 2 cuerpos (Vasiliev 2013). Nuestro trabajo confirma este hecho y cómo las energías individuales de las partículas más ligadas del sistema siguen el característico “random walk” de un proceso de difusión, pero también cómo las partículas menos ligadas permanecen prácticamente immune al fenómeno difusivo causado por encuentros cercanos.

Entre estos dos extremos (Figura 3.26), hemos querido demostrar en este trabajo que es posible extraer y clasificar las órbitas de partículas selectas directamente de nuestras simulaciones, sin necesidad de “congelar” la configuración final para extraer un potencial estacionario, del cual puedan obtenerse órbitas con partículas de prueba. Así, las órbitas

extraídas aquí corresponden a partículas cuyas energías individuales muestran un buen nivel de constancia en tres intervalos de error rms :

$$-4.5 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.0 \quad (\text{Modelos 1A y 1B}),$$

$$-5.0 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -4.5 \quad (\text{Modelos 2A y 2B}),$$

$$-5.5 < \log \delta E_{\text{rms}}/\Delta t < -5.0 \quad (\text{Modelo 4A}).$$

Esto ha sido posible dado el poder del código GYRFALCON para lograr, con los parámetros óptimos durante los intervalos de integración considerados, valores de energía individual suficientemente finos como para generar errores rms en energía hasta del orden de 10^{-8} , típicos de las partículas menos ligadas del sistema. Bajo estas condiciones, el número total de órbitas selectas en este trabajo, las que representan 1 a 1.5% de la población total de partículas (10^6) en nuestros modelos, han sido clasificadas con un alto nivel de confianza.

2) En cuanto a su forma, nuestros esferoides prolatos y cuasiprolatos son consistentes con i) las formas esperadas en sistemas descritos por dispersión de velocidades anisotrópicas y ii) las elipticidades, triaxialidades y barras centrales —inducidas por ROI— obtenidas en los esferoides resultantes bajo condiciones de colapso frío (Aguilar y Merritt 1990).

3) Las partículas individuales en nuestros sistemas i) muestran pertenecer a las familias fundamentalmente cuasiperiódicas de órbitas resultantes en potenciales cuspidales triaxiales/prolatos (de Zeeuw 1985), ii) evidencian la preponderancia de órbitas de tubo de eje mayor (X) y órbitas de caja, desapareciendo prácticamente los tubos en Z del modelo 2B, evidencia de su franca prolaticidad, en contraste con la cuasiprolaticidad del modelo 2A (Valluri et ál. 2010), aunque iii) la fracción de órbitas caóticas resultantes en ambos modelos, sin embargo, resulta ser muy inferior a la reportada por otros autores (p.ej. Zorzi y Muzzio 2012) bajo un escenario cuspidal similar, aunque más francamente triaxial.

4) Este ejercicio numérico con simulaciones de N -cuerpos “vivas” de colapsos fríos motiva un análisis posterior, siendo la posibilidad de construir modelos autoconsistentes de galaxias a través del método de superposición de órbitas (Schwarzschild 1979) uno muy

importante. Esto nos permitirá comparar la estructura orbital de estos sistemas, moldeados por el relajamiento violento, con el intervalo de sistemas autoconsistentes que puedan ser contruidos con tal método.

Referencias

Aarseth, S. J., 2003, Gravitational N-Body Simulations, Cambridge University Press.

Aguilar, L.A., 1992, Revista Mexicana de Física, 38, 701.

Aguilar, L.A., 2005, Dynamics of Galaxies and Clusters of Galaxies, apuntes para The 2005 Guillermo Haro Advanced School: A Panchromatic View of Clusters of Galaxies and the LSS, INAOE, Tonantzintla, Puebla , México.

Aguilar, L.A., 2006, The Art of N-body simulations, apuntes para la International School on Galactic and Cosmological N-Body Simulations, Tonantzintla, Puebla, México.

Aguilar, L.A., 2010, Procesos de Relajamiento, apuntes de Dinámica Galáctica, IAUNAM, México.

Aguilar, L.A., 2012, La Ecuación de Boltzmann, apuntes de Dinámica Galáctica, IAUNAM, México.

Aguilar, L.A. y Merritt, D., 1990, ApJ, 354, 33.

Antonini, F., Capuzzo-Dolcetta, R. y Merritt, D., 2008, Astron. Nachr., 329, 900.

Antonov, V.A., 1973, On the instability of stationary spherical models with purely radial motions, en Dynamics of Galaxies and Star Clusters, pp. 139-143.

Appel, A.W., 1981, Tesis de Licenciatura en Ciencias Computacionales, Universidad de Princeton.

Baes, M. y Dejonghe, H., 2002, A&A, 393, 485.

Barnes, J., 1985, en IAU Symposium 114, Dynamics of Star Clusters, ed. J. Goodman and P. Hut (Dordrecht: Reidel), p. 297.

- Barnes, J. E. y Hut, P., 1986, *Nature*, 324, 446.
- Bender, R. y Nieto, J.-L., 1990, *A&A*, 239, 97.
- Bertola, F. y Capaccioli, M., 1975, *ApJ*, 200, 439.
- Binney, J., 1976, *MNRAS*, 177, 19.
- Binney, J., 1978, *MNRAS*, 183, 501.
- Binney, J. y Merrifield, M., 1998, *Galactic Astronomy*, Princeton University Press.
- Binney, J. y Spergel, D., 1982, *ApJ*, 252, 308.
- Binney, J. y Tremaine, S., 2008, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press.
- Burkert, A., 1993, *A&A*, 278, 23.
- Buta, R. J., 2011, *Planets, Stars and Stellar Systems*, Vol. 6, Series Editor T. D. Oswalt, Volume editor W. C. Keel, Springer Reference.
- Carpintero, D. D. y Aguilar, L.A., 1998, *MNRAS*, 298, 1.
- Ceverino, D., Klypin, A., 2007, *MNRAS*, 379, 1155.
- Chandrasekhar, S., 1942, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York.
- Cincotta, P.M., Núñez, J.A., Muzzio, J.C., 1996, *ApJ*, 456, 274.
- Collins, G.W., 1978, *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*, Pachart Publishing House, <http://ads.harvard.edu/books/1978vtsa.book/>.
- Crane, P. et al., 1993, *AJ*, 106, 1371.
- Davies, R. L., Efstathiou, G., Fall, S.M., Illingworth, G. y Schechter, P.L., 1983, *ApJ*, 266, 41.
- de Vaucouleurs, G., 1948, *Ann. Astrophys.*, 11, 247.
- de Vaucouleurs, G., 1959, *Handbuch der Physik*, 53, 275.
- de Zeeuw, T., 1985, *MNRAS*, 216, 273.

de Zeeuw, T. y Franx, M., 1991, ARAA, 29, 239.

Dehnen, W., 1993, MNRAS, 265, 250.

Dehnen, W., 2000, ApJ, 536, L39.

Dehnen, W., 2002, JCP, 179, 27.

Efstathiou, G., Davis, M., Frenk, C.S. y White, S.D.M., 1985, ApJS, 57, 241.

Flynn, C., 2010, Galactic dynamics lecture notes, University of Turku, Tuorla Observatory, <http://www.astro.utu.fi/~cflynn/galdyn/lecture4.html>.

Gerhard, O.E., Binney, J., 1985, MNRAS, 216, 467.

Ghez, A.M., Morris, M., Becklin, E.E., Tanner, A., Kremenek, T., 2000, Nature, 407, 349.

Gonsalves, R.J., 2011, Equations of Mechanics lecture notes, University of Buffalo Physics Department, <http://www.physics.buffalo.edu/phy302/topic1/>.

Greengard, L. y Rokhlin, V., 1987, J. Comput. Phys., 73, 325.

Heggie, D. y Hut, P., 2003, The Gravitational Million-Body Problem, Cambridge University Press.

Hénon, M., 1973, A&A, 24, 229.

Hernquist, L., 1990, ApJ, 356, 359.

Hockney, R.W. y Eastwood, J.W., 1988, Computer Simulation Using Particles, Taylor & Francis.

Holmberg, E., 1941, ApJ, 94, 385.

Hubble, E., 1922, ApJ, 56, 162.

Hubble, E., 1926, Contributions from the Mount Wilson Observatory, No. 324. Extra-galactic nebulae.

Hubble, E., 1930, ApJ, 214, 359.

Jernigan, J.G., 1985, Simposio de la UAI No. 113: Dynamics of Star Clusters, editado por J. Goodman y P. Hut, Dordrecht: Reidel, p. 131.

Jiménez Vicente, J., 2015, Propiedades de las Galaxias Elípticas, Depto. de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, <http://www.ugr.es/~jjimenez/gals/elipticas.ppt>.

Kandrup, H.E. y Siopis, C., 2003, MNRAS, 345, 727.

King, I.R., 1966, AJ, 71, 64.

Lynden-Bell, D., 1967, MNRAS, 136, 101.

Makino, J., y Taiji, M., 1998, Scientific Simulations with Special-Purpose Computers: The GRAPE Systems, Wiley.

Maréchal, L. y Perez, J., 2010, TTSP, 40, 425.

McElroy, D.B., 1983, ApJ, 270, 485.

Merritt, D., 1987, Simposio IAU 127, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies, ed. T. de Zeeuw (Dordrecht: Reidel), 315.

Merritt, D., 1999, PASP, 111, 129.

Merritt, D. y Aguilar, L.A., 1985, MNRAS, 217, 787.

Merritt, D. y Valluri, M., 1996, ApJ, 471, 82.

Merritt, D. y Valluri, M., 1999, AJ, 118, 1177.

Mikkola, S., 1997, CeMDA, 68, 87.

Minkowski, R., 1961, Problems of Extragalactic Research, ed. G.C. McVittie (New York: Macmillan Co.), p.112.

Miralda-Escudé, J. y Schwarzschild, M., 1989, ApJ, 339, 752.

Muzzio, J.C., Navone, H.D. y Zorzi, A.F., 2013, MNRAS, 428, 2995.

Plummer, H.C., 1911, MNRAS, 71, 460.

Polyachenko, V.L. y Shukhman, I.G., 1981, A. Zh., 58, 933.

Saslaw, W.C., 2001, Stellar Dynamics, Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, Nature Publishing Group, <http://www.astro.caltech.edu/~george/ay20/aaa-steldyn.pdf>.

Schwarzschild, M., 1979, ApJ, 232, 236.

Schwarzschild, M., 1982, ApJ, 263, 599.

Springel, V., Yoshida, N. y White, S.D.M., 2001, NewA, 6, 79.

Statler, T.S., 1987, ApJ, 321, 113.

Stiavelli, M., Møller, P. y Zeilinger, W. W., 1993, A&A, 277, 421.

Stiefel, E.L. y Schiefele, G., 1971, Linear and Regular Celestial Mechanics (Berlin: Springer).

Stone, J.M., 2007, Computational astrophysics. Scholarpedia, 2(10): 2419.

Syer, D., Tremaine, S., 1996, MNRAS, 282, 223.

Teuben, P., 1995, ASPC, 77, 398.

Trenti, M. y Hut, P., 2008, N-body simulations. Scholarpedia, 3(5): 3930.

Valluri, M., Debattista, V.P., Quinn, T., Moore, B., 2010, MNRAS, 403, 525.

van Albada, T.S., 1982, MNRAS, 201, 939.

van den Bosch, F.C., 2005, Dynamics of Collisionless Systems lecture notes, Astronomy Department, Yale University, <http://www.astro.yale.edu/vdbosch/lecture10.pdf>.

Vasiliev, E., 2013, MNRAS, 434, 3174.

von Hoerner, S., 1960, ZA, 50, 184.

Vorobyov, E.I., Theis, Ch., 2008, MNRAS, 383, 817.

Walker, M. F., 1962, ApJ, 136, 695.

Wang, L., Spurzem, R., Aarseth, S., Nitadori, K., Berczik, P., Kouwenhoven, M.B.N. y Naab, T., 2015, MNRAS, 450, 4070.

Weisstein, E. W., 2016, Spherical Harmonic, MathWorld-A Wolfram Web Resource

<http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>.

White, S.D.M., 1996, Gravitational dynamics, Proceedings of the 36th Herstmonceux conference, in honour of Professor D. Lynden-Bell's 60th birthday held in Cambridge, UK, August 7-11, 1995, Cambridge University Press.

Wilkinson, A. y James, R.A., 1982, MNRAS, 199, 171.

Young, P.J., 1976, AJ, 81, 807.

Zorzi, A.F. y Muzzio, J.C., 2012, MNRAS, 423, 1955.

Zotos, E.E., Caranicolas, N.D. y E.G. Doni, 2015, Nonlinear Studies, 22, 1.

Zwicky, F., 1939, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 25, 604.

